



Titre: Application de l'holographie acoustique transitoire au contrôle non destructif de structures
Title:

Auteur: Nicolas Aujogue
Author:

Date: 2019

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Aujogue, N. (2019). Application de l'holographie acoustique transitoire au contrôle non destructif de structures [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal].
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/3978/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/3978/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Annie Ross
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

**Application de l'holographie acoustique transitoire
au contrôle non destructif de structures**

NICOLAS AUJOGUE

Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Génie mécanique

Août 2019

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Application de l'holographie acoustique transitoire
au contrôle non destructif de structures**

présenté par **Nicolas AUJOGUE**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Cédric BÉGUIN, président

Annie ROSS, membre et directrice de recherche

François-Raymond BOYER, membre

DÉDICACE

À mes parents et à mon frère.

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à ma directrice de recherche, Annie Ross, qui est restée à l'écoute de mes propositions et qui m'a accordé une grande autonomie tout au long de cette maîtrise. Son expertise m'a été d'une aide précieuse à de nombreuses reprises, et m'a permis de tirer le meilleur de moi même. La relation de confiance qui s'est tissée durant ces deux années m'a permis d'avancer sereinement et de mener à bien ce projet de recherche. Je prends bonne note de son style d'encadrement que j'aimerais imiter dans ma future vie professionnelle.

Je souhaite également remercier Jean-Michel Attendu qui m'a permis de commencer cette maîtrise dans les meilleures conditions qui soient. Ses conseils techniques, ses relectures d'articles, et les discussions fructueuses ont eu un impact significatif sur mes apprentissages. J'espère avoir été à la hauteur de tous les savoirs qu'il m'a légués à la fin de son doctorat ! J'adresse aussi tous mes remerciements à Vincent Dansereau, qui m'a non seulement fourni une paire de bras supplémentaire à un moment où elle était absolument nécessaire, mais qui m'a aussi apporté un regard critique sur toute la partie expérimentale de cette maîtrise. Merci aussi à tous les techniciens du LAVA (Isabelle Nowlan, Nour Aimene, Bénédicte Besner) pour leur expérience et leur aide précieuse lors de l'élaboration des bancs d'essais. Merci également à Nadine Bernard pour sa bienveillance et sa corbeille de bonbons.

Je remercie également les réviseurs de mes articles, mon jury de maîtrise, et Elsa Piollet pour leur investissement lors des relectures de ces travaux. Je tiens également à exprimer ma gratitude envers le CRSNG qui a permis le financement de cette maîtrise.

Merci à mes camarades du LAVA avec qui j'ai eu le plaisir de passer ces deux superbes années. Merci à Yann, Juliette, Sabine, Solène, Amine, Jean, Josué, Florence, Jeanne, Élise, Quentin et tous les autres d'avoir supporté la principale source d'entropie du C112. Merci d'avoir maintenu mon taux sanguin de caféine à un niveau strictement positif, merci d'avoir enduré mes coups de raquette de squash (presque toujours involontaires), et merci pour ces discussions animées lors des repas.

Je remercie aussi mes amis et colocataires Alexandre et Charlotte avec qui j'ai partagé tant de peines et (surtout) de joies. Enfin, je souhaite exprimer toute ma reconnaissance à mes parents et à mon frère pour leur soutien indéfectible, sans lequel rien n'aurait été possible.

RÉSUMÉ

Les entreprises du secteur des transports se doivent de garantir la sécurité et la fiabilité des équipements qu'ils proposent. Ce double enjeu les pousse à investir pour développer des méthodes facilitant la maintenance de leurs appareils. En particulier, de nombreuses méthodes de contrôle non destructif sont développées pour vérifier l'intégrité de certaines pièces structurales tout en réduisant les coûts de maintenance grâce à une maximisation de la qualité du diagnostic et à une minimisation du temps d'immobilisation des appareils. Parmi ces méthodes, un certain nombre s'appuie sur le comportement dynamique des structures à inspecter pour détecter des défauts.

Dans ce mémoire, cette approche est adoptée pour développer une nouvelle méthode d'inspection. L'originalité de cette méthode tient au fait qu'elle s'appuie sur la mesure du comportement vibratoire par holographie acoustique en champ proche. Cette méthode de mesure permet d'estimer le champ vibratoire d'une pièce à partir du champ acoustique qu'elle rayonne. L'intérêt d'utiliser une telle technique réside dans le fait que c'est une méthode de mesure sans contact, ce qui évite toute détérioration ou contamination de la pièce par des instruments de mesure. De plus, l'antenne de microphones n'interfère pas avec la structure, contrairement aux accéléromètres, dont la masse peut perturber le système. Enfin, l'holographie acoustique nécessite un équipement relativement peu dispendieux, et permet d'effectuer des mesures sur des grandes zones, tout en évitant un scan de la structure long et fastidieux, comme pour les méthodes par vibrométrie laser.

En définitive, nous avons cherché à développer une méthode de contrôle non destructif se basant uniquement sur la mesure du champ de pression rayonné par la pièce inspectée. Il s'agit ici d'apporter une preuve de concept pour notre approche, ce qui justifie le fait que l'on s'intéresse au cas très simplifié des plaques. Malgré cela, chaque choix dans cette maîtrise a été effectué en ayant en tête les développements futurs qui permettront de traiter des structures plus complexes. Il a de plus été supposé que la meilleure approche pour mener à bien ce projet était de travailler dans le domaine temporel, en régime transitoire. En effet, les méthodes fréquentielles permettent un diagnostic à un nombre de fréquences limité, tandis que les méthodes transitoires permettent d'analyser la structure sur une large bande, tout en ayant des informations sur la causalité des événements : si une image vaut mille mots, une vidéo vaut un million de mots, car la dimension temporelle regorge d'informations sur la structure.

L'approche proposée pour répondre aux objectifs de ce mémoire s'articule en trois volets. Le premier s'attache à développer une méthode d'holographie acoustique transitoire adaptée à notre problème. L'originalité de cette partie vient du fait que l'on applique une déconvolution linéaire entre le signal mesuré et la fonction de Green qui relie la vitesse normale de la plaque à la pression sur le plan de mesure. De plus, la fonction de Green est échantillonnée dans le domaine spatial et temporel pour éviter les effets de fuite spectrale et de recouvrement. Il est montré que cette technique est plus adaptée aux signaux transitoires que les autres méthodes de la littérature et qu'elle permet une reconstruction de la source avec un taux d'erreur inférieur à 20% pour des distances source-plan de mesure jusqu'à 5 cm, et des rapports signal sur bruit réalistes (20 dB). L'applicabilité de cette méthode est démontrée expérimentalement grâce à un banc d'essai comportant une plaque de plexiglass excitée par un impacteur métallique.

Le second volet permet de développer la méthode de détection de défauts à proprement parler. On part ici d'un champ vibratoire mesuré, et on applique la méthode de Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée (RIFF) pour calculer le résidu des équations du mouvement qui permet de faire ressortir les défauts. Cette méthode, initialement développée pour des excitations harmoniques, est ici étendue pour traiter des signaux transitoires. Une implémentation est proposée pour traiter le cas des plaques homogènes et isotropes mais aussi les matériaux stratifiés. Il est démontré que cette technique permet de détecter des défauts simples comme des masses ajoutées ou des inclusions métalliques. En effet, un défaut génère un déséquilibre dans les équations du mouvement qui rend le résidu calculé non nul à l'emplacement correspondant au défaut. Les limites de cette approche sont soulignées pour justifier le troisième volet de la maîtrise : il est nécessaire de pouvoir discriminer l'effet du bruit de mesure sur le résidu de la contribution d'un défaut. Cela est d'autant plus critique lorsque l'on souhaite utiliser cette méthode sur un jeu de données comportant des imprécisions, comme c'est le cas des champs vibratoires mesurés par holographie acoustique.

Le troisième volet consiste donc à appliquer une méthode statistique pour prendre du recul sur le résidu calculé par la méthode de résolution inverse : on cherche ici à quantifier les incertitudes associées au résidu pour déterminer la pertinence du diagnostic. Pour cela, on s'appuie sur un formalisme Bayésien récemment développé dans la littérature et exploité par une méthode de Monte-Carlo par chaîne de Markov. Ce formalisme permet d'estimer le niveau du bruit de mesure et de propager ce bruit sur le résultat. Les intervalles de crédibilité obtenus permettent de quantifier l'incertitude associée au diagnostic final. Il est montré sur des données expérimentales que cette méthode statistique permet une détection particuliè-

rement fiable (avec probabilité 99%) des défauts simples lorsque le champ de pression est mesuré sur un plan très proche de la structure à étudier (typiquement 1 cm).

Ce mémoire se conclut sur l'analyse de l'importance scientifique et technologique de ces travaux. Les résultats obtenus et l'approche proposée sont mis en perspective avec les besoins de l'industrie dans le domaine du contrôle non destructif. Des pistes d'améliorations sont enfin proposées pour appliquer la méthode proposée à des cas plus réalistes que celui d'une simple plaque.

ABSTRACT

Companies of the transportation industry need to ensure both safety and reliability of their devices. Therefore, in the last 30 years, a significant research endeavor has lead to a set of methods allowing efficient maintenance. Non destructive testing methods have been developed to check the structural integrity of important pieces while lowering maintenance cost, and improving diagnostic accuracy. Among those methods, some rely on the analysis of their dynamic behavior to detect defects in structures.

In this master thesis, a novel approach for non destructive testing based on this idea is developed. Unlike other state-of-the-art techniques, this method is based on full-field vibration measurement using nearfield acoustical holography. This technique allows estimating the vibration field of some structure from the measurement of acoustic pressure in its near field performed with a microphone array. The advantage of using such measurement method is that it is contactless; therefore, contamination or damage of the structure by measurement hardware is avoided. Moreover, microphone arrays do not modify the structure, unlike accelerometers for example, and are affordable compared to other optical methods, such as laser vibrometers.

The aim of this study is to develop a non destructive testing method simply based on the measurement of the pressure field radiated by the piece under study. This master thesis aims at providing a proof of concept for the proposed methodology. Thus, the present document focuses on plates, while keeping in mind future developments to study more complex structures. In addition, this whole study focuses on transient regime and exploit time-domain data. Unlike frequency-domain methods that rely on the study of a small set of frequencies, time-domain data obtained from impact-like excitations allows inspecting the structure over a wide spectrum while having access to causality. To sum up, considering that an image is worth a thousand words, a video should be worth a million words, since time dimension gives us access to a lot more information about the structure.

The proposed approach is given in three parts. First, a formalism for nearfield acoustical holography suitable for this particular application is developed. Here, the original contribution lies in the linear deconvolution applied to all three dimensions (time and space) between the measured pressure field and the Green's function expressing the relation between transverse velocity on the reconstruction plane and pressure on the measurement plane. Fur-

thermore, the Green's function is sampled directly in time and space domains, which avoids spectral leakage and wrap-around errors. This method is shown to perform better than other state-of-the-art methods and allows reconstruction of the source with an error rate lower than 20% for back-propagation distances up to 5 cm and typical signal-to-noise ratios (20 dB). The practical applicability of this method is shown on a test bench with a plexiglass plate impacted by a steel rod.

The second part of this thesis is dedicated to the fault detection algorithm in itself. Here, the vibration field is assumed to be correctly measured, and is used to compute the residue of the equation, which is to be analysed to track defects. This Force Analysis Technique was first developed for harmonic excitations, but was never used to handle time-domain data. It is therefore extended to process transient data, and its implementation is compatible with both isotropic and laminated materials. It is shown that this technique allows detecting simple defects, such as added masses bonded to the plate, or inclusions. The limitations of this approach are highlighted to justify the third part of this thesis : it is necessary to distinguish between the effect of noise on the residue and the contribution of a defect. This is indeed of critical importance, especially when input data is prone to errors, such as vibration fields obtained from nearfield acoustical holography.

The last part of this work concerns the quantification of uncertainties over the computations of the residue in order to gain insight on the significance of the diagnostic. To achieve this goal, a fully Bayesian approach recently developed in the literature is used in combination with Monte-Carlo Markov Chain algorithm. This algorithm allows estimating the level of measurement errors and propagating them to the result. Credible intervals are obtained, which allows estimating the level of confidence that can be allocated to the diagnostic. Computations on experimental data show that this method allows reliable detection of simple defects provided the measurement plane is close enough to the structure under examination (typically 1 cm).

Finally, the technological and scientific significance of this work is analyzed. The proposed approach and the results are put in perspective with the needs of the industry concerning non destructive testing. Further ideas to improve the proposed method are given to apply it more realistic cases than plates.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xviii
LISTE DES ANNEXES	xxi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Contexte général	1
1.2 Méthodes d’inspection existantes	2
1.3 Contexte particulier	3
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	5
2.1 Techniques existantes d’imagerie acoustique	5
2.1.1 Aperçu des principales familles	5
2.1.2 Modélisation du problème	7
2.1.3 Gestion du problème inverse	12
2.1.4 Implémentations de la NAH transitoire	18
2.2 Méthodes d’identification inverse de défauts	22
2.2.1 Méthodes globales et méthodes variationnelles	22
2.2.2 Méthode locale	23
2.2.3 Identification par inférence Bayésienne	25
2.3 Bilan de la revue de littérature	25
CHAPITRE 3 APPROCHE PROPOSÉE ET ASPECTS MÉTHODOLOGIQUES	27

3.1	Problème de recherche identifié	27
3.2	Objectifs et hypothèses de la maîtrise	27
3.2.1	Objectif général	27
3.2.2	Objectifs spécifiques	27
3.2.3	Hypothèses de recherche	28
3.3	Méthodologie	29
CHAPITRE 4 ARTICLE 1 : TIME-SPACE DOMAIN NEARFIELD ACOUSTICAL HOLOGRAPHY FOR VISUALIZING NORMAL VELOCITY OF SOURCES		
4.1	Préface	32
4.2	Abstract	32
4.3	Introduction	33
4.4	Theoretical development	34
4.4.1	Analytical formulation	34
4.4.2	Backward propagation problem	36
4.5	Numerical validation	38
4.5.1	Case study : circular membrane	39
4.5.2	Case study : simply supported plate	42
4.6	Experiment	45
4.6.1	Experimental setup	45
4.6.2	Experimental results	46
4.7	Conclusion	47
CHAPITRE 5 ARTICLE 2 : TRANSIENT FORCE ANALYSIS TECHNIQUE TO IDENTIFY TIME-VARYING LOADS AND DEFECTS ON PLATES		
5.1	Préface	51
5.2	Abstract	51
5.3	Introduction	52
5.4	Theory of transient FAT	52
5.4.1	Theoretical framework	53
5.4.2	Discretized formulation	53
5.4.3	Regularization and windowing steps	55
5.5	Experiments	57
5.5.1	Experimental setup	57
5.5.2	Results and analysis	57
5.6	Conclusion	59
5.7	Acknowledgements	60

CHAPITRE 6	EXTENSION DE LA MÉTHODE RIFF AUX MATÉRIAUX STRATI-	
	FIÉS	61
6.1	Introduction	61
6.2	Extension de la méthode RIFF transitoire	61
6.3	Validation numérique	64
6.4	Validation expérimentale	68
	6.4.1 Fabrication des plaques	69
	6.4.2 Mesure et détection de défauts	70
6.5	Conclusion partielle	73
CHAPITRE 7	DISCUSSION GÉNÉRALE : COUPLAGE NAH-RIFF ET EXPLOITA-	
	TION PAR MÉTHODE BAYÉSIENNE	75
7.1	Introduction	75
7.2	Cadre théorique	75
	7.2.1 Formalisme Bayésien standard	75
	7.2.2 Formalisme Bayésien étendu	77
7.3	Application expérimentale	81
	7.3.1 Calcul du champ de pression	82
	7.3.2 Rétro-propagation des données	83
	7.3.3 Échantillonnage et interprétation	86
7.4	Conclusion partielle	92
CHAPITRE 8	CONCLUSION	93
8.1	Synthèse des travaux	93
8.2	Atteinte des objectifs	94
8.3	Limitations et travaux futurs	95
8.4	Autres contributions	97
	8.4.1 Encadrement	97
	8.4.2 Legs	97
RÉFÉRENCES	98
ANNEXES	106

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Parameters used for the piston	49
Tableau 4.2	Parameters used for the plate	50
Tableau 6.1	Paramètres utilisés pour calculer la réponse de la plaque	65
Tableau 7.1	Tableau des résultats de la méthode. Les X représentent les cas où le défaut est identifié avec succès, et les cases vides correspondent au cas où le défaut n'est pas identifié.	92

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Schéma du problème acoustique inverse en configuration plane.	8
Figure 2.2	Log-amplitude de la fonction de Green dans le domaine de Fourier, pour une fréquence $f = 40$ kHz, et une distance de propagation de $d = 5$ cm.	10
Figure 2.3	Illustration du comportement des ondes propagatives et évanescentes, pour une fréquence ω donnée, adapté de [15].	10
Figure 2.4	Amplitude du filtre de Veronesi pour $\alpha_V = 0,2$ et $k_V = 188 \text{ m}^{-1}$	13
Figure 2.5	Courbe en L obtenue sur un exemple numérique, représentée sur une échelle logarithmique.	16
Figure 4.1	Geometry of planar nearfield acoustical holography. Black dots illustrate microphone positions.	35
Figure 4.2	Diagram of the steps needed to compute the regularized solution $\hat{\mathbf{v}}$. The hatched area corresponds to samples of $\hat{\mathbf{V}}$ that are not relevant and must be left out.	38
Figure 4.3	Normal velocity signals obtained by TSD-NAH, RT-NAH and TD-NAH, for $d = 5$ cm.	39
Figure 4.4	Time-space domain Green's function for $d = 5$ cm (in arbitrary units). First row is a snapshot at $t = 0.5$ ms, second row is at $t = 0.85$ ms. First columns is a t - x - y sampling (TSD-NAH), second column is a t - k_x - k_y sampling (RT-NAH), and third column is a ω - k_x - k_y sampling (TD-NAH).	41
Figure 4.5	Comparison of the reconstructed velocity fields for $d = 5$ cm. First row is a snapshot at $t = 0.3$ ms, second row is at $t = 2$ ms. The first column is the actual velocity profile. The second, third and fourth columns are respectively fields computed with TSD-NAH, RT-NAH, and TD-NAH.	42
Figure 4.6	Excitation of the plate under study.	43
Figure 4.7	Values of errors obtained and regularization parameter used in the computation.	44
Figure 4.8	Comparison of the reconstructed velocity with the solution at the three positions indicated in figure 4.6b. First line is at the position of the impact (10, 5) cm (circle), second line is at the center of the plate (0, 0) cm (cross), and third line is at the symmetrical point of the impact (-10, -5) cm (triangle), for $d = 5$ cm, SNR=20 dB.	45

Figure 4.9	Comparison of the reconstructed velocity field with the solution at two time steps ($t = 1.2$ ms and $t = 2$ ms) for $d = 5$ cm, and $SNR = 20$ dB. Reconstructed values located outside the plate are ignored for better clarity.	46
Figure 4.10	Comparison of the velocity field reconstructed by TSD-NAH with the actual field measured by accelerometers at two time steps (0.3 ms and 0.5 ms after the impact).	48
Figure 4.11	Fourier domain representation of the normal velocity over the plate. .	48
Figure 5.1	Block diagram summarizing the steps involved to compute the force distribution. \mathcal{F} and \mathcal{F}^{-1} denotes 3D-FFT and inverse 3D-FFT. The hatched area represents the samples of the output affected by the windowing step.	56
Figure 5.2	Front view (a) and side view of the setup (b). 1) base frame. 2) plexi-glass plate. 3) laser vibrometer. 4) electromagnet. 5) impact hammer. 6) added mass.	58
Figure 5.3	Measured displacement field.	58
Figure 5.4	RMS values of the distributed loading computed using transient FAT. .	59
Figure 5.5	Superposition of the impact signal measured by the impact hammer and the force obtained by transient FAT.	60
Figure 6.1	Comparaison des noyaux de convolution utilisés dans le cas homogène et le cas stratifié.	63
Figure 6.2	Réponse de l'opérateur : $20 \log_{10} \mathcal{F}(\tilde{k}) $, pour une fréquence de 12,5 kHz. .	64
Figure 6.3	Configuration de la plaque étudiée. La zone 1 correspond à un désalignement des fibres de 30 degrés, et est située à $(x, y) = (10; 5)$ cm. La zone 2 correspond à une masse ajoutée, et est située à $(x, y) = (-15; -3)$ cm.	65
Figure 6.4	Visualisation du champ de déplacement calculé par superposition modale à deux instants différents.	66
Figure 6.5	Fonction à optimiser pour déterminer le paramètre de régularisation optimal. Les cercles rouges correspondent aux itérations successives de l'algorithme du gradient utilisé pour minimiser $J_B(\lambda)$	67
Figure 6.6	Carte RMS du résidu calculé par méthode RIFF entre $t = 0,5$ ms et $t = 10$ ms.	68

Figure 6.7	Excitation estimée par méthode RIFF transitoire comparée à l'excitation utilisée pour calculer la réponse de la plaque. a) Comparaison absolue au point d'impact. b) Comparaison par intégration. c) Comparaison au point d'impact normalisée.	69
Figure 6.8	Mise au four de la plaque en carbone. Le système de mise sous vide est constitué d'un film plastique et de différents tissus permettant l'absorption de l'excédent de résine et le démoulage, ainsi que d'une pompe à vide raccordée au volume d'air enfermé dans le sac.	70
Figure 6.9	Fabrication de la plaque comportant des inclusions. La photo représente les deux feuilles de silicone posés sur le second pli, avant que les autres plis soient empilés.	70
Figure 6.10	Vue de face du montage. Le cercle blanc représente la position de la masse collée sur la face arrière de la plaque. Le carré 1 représente la zone où l'inclusion est d'épaisseur 0,2 mm, le carré 2 représente celle où l'inclusion est d'épaisseur 0,4 mm.	71
Figure 6.11	Champs de vitesse (a et c) et de déplacement (b et d) des deux plaques, à $t = 0,5$ ms après l'impact. La plaque comportant une masse est représentée sur les figures a et b, et la plaque comportant les inclusions sur les figures c et d.	72
Figure 6.12	Cartes en valeur RMS du résidu obtenu après application de la méthode RIFF transitoire. Ces valeurs sont calculées sur les pas de temps après l'impact (de $t = 0,5$ ms à $t = 10$ ms).	74
Figure 7.1	Graphe hiérarchique représentant la dépendance des variables du problème. Les variables dans les rectangles bleus sont les variables déterministes (mesurées ou fixées par l'utilisateur), et les variables dans les cercles rouges sont les variables aléatoires dont on a besoin d'échantillonner la probabilité conditionnelle.	79
Figure 7.2	Montage utilisé pour l'étude. Une plaque en plexiglass comportant une inclusion métallique est placée sur le banc d'essai utilisé aux chapitres 5 et 6.	82
Figure 7.3	Pression calculée sur différents plans parallèles à la source, à $t = 0,5$ ms après l'impact. La vitesse mesurée par vibrométrie laser est représentée sur la surface $d = 0$	83
Figure 7.4	Schéma bloc de l'implémentation du problème direct en utilisant le formalisme TSD-NAH.	84

Figure 7.5	Cartes d'erreur de la reconstruction du champ de vitesse. La première colonne représente l'indicateur d'accord de phase φ (un fort accord — se rapprochant de 1 — tend vers le rouge). La seconde colonne indique la répartition de l'erreur de norme M (une erreur faible — se rapprochant de 0 — tend vers le bleu). Chaque ligne correspond à une distance de rétro-propagation donnée : $d = 1, 3, 5, 7$ cm.	85
Figure 7.6	Convergence de l'algorithme pour les paramètres τ_n et τ_f , ainsi que le paramètre λ correspondant, pour une distance de rétro-propagation de $d = 2$ cm.	86
Figure 7.7	Histogrammes des tirages de τ_n et τ_f obtenus, ainsi que des paramètres λ correspondants, pour une distance de rétro-propagation de $d = 2$ cm.	87
Figure 7.8	Visualisation du résidu dans le domaine spatial, pour $t = 0,186$ ms et une distance de rétro-propagation de $d = 2$ cm. Les nappes transparentes correspondent aux extrémités des intervalles de crédibilité à 75% (gris foncé) et 95% (gris clair), et la nappe rouge correspond au maximum a posteriori.	88
Figure 7.9	Visualisation des intervalles de crédibilité dans le domaine spatial, pour $t = 0.186$ ms et une distance de rétro-propagation de $d = 2$ cm.	88
Figure 7.10	Résidus obtenus à la position du défaut, et au centre de la plaque, pour une rétro-propagation de $d = 2$ cm.	90
Figure 7.11	Carte de l'indice $N_{75\%}$ pour une rétro-propagation sur $d = 2$ cm.	91
Figure A.1	Étapes d'implémentation de la Time method. \mathcal{F}_{xy} désigne la transformée de Fourier bi-dimensionnelle dans les directions x et y , et \mathcal{F}_t désigne la transformée de Fourier suivant l'axe t	106
Figure A.2	Étapes d'implémentation de la TD-NAH. \mathcal{SF}_t désigne la transformée de Fourier à court terme.	107
Figure A.3	Étapes d'implémentation de la T-NAH. \mathcal{L}_t désigne la transformée de Laplace. Deux régularisations sont nécessaires, à la troisième et dernière étape.	108
Figure A.4	Étapes d'implémentation de la RT-NAH.	109

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

NAH	Nearfield Acoustical Holography
DAMAS	Deconvolution Approach for the Mapping of Acoustic Sources
SONAH	Statistically Optimized Nearfield Acoustical Holography
PWSM	Plane Wave Superposition Method
HELs	Helmholtz Equation Least Squares
IBEM	Inverse Boundary Elements Method
DFT	Discrete Fourier Transform
FFT	Fast Fourier Transform
3D-FFT	Three dimensional Fast Fourier Transform
GCV	Generalized Cross Validation
TD-NAH	Time Domain Nearfield Acoustical Holography
T-NAH	Transient Nearfield Acoustical Holography
RT-NAH	Real Time Nearfield Acoustical Holography
TSD-NAH	Time-Space Domain Nearfield Acoustical Holography
VFM	Virtual Fields Method
RIFF	Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée
FAT	Force Analysis Technique
MCMC	Monte-Carlo Markov Chain
MAP	Maximum A Posteriori
SNR	Signal to Noise Ratio
TPA	Transfer Path Analysis
RMS	Root Mean Square
IC	Intervalle de Crédibilité
p	pression
\mathbf{p}	pression (notation vectorielle)
\mathbf{G}	matrice de transfert acoustique
\mathbf{q}	sources acoustiques (notation vectorielle)
\mathbf{W}	opérateur inverse de la matrice de transfert acoustique
v	vitesse normale de la plaque
ρ_0	densité de l'air
c	vitesse du son dans l'air
g	fonction de Green
d	distance entre le plan de mesure et la source

δ	fonction delta de Dirac
\mathcal{F}	opération transformée de Fourier tri-dimensionnelle
\mathcal{F}_{xy}	opération transformée de Fourier spatiale
\mathcal{F}_t	opération transformée de Fourier temporelle
\mathcal{SF}_t	opération transformée de Fourier à court terme
\mathcal{L}_t	opération transformée de Laplace temporelle
\mathcal{F}^{-1}	opération transformée de Fourier inverse tri-dimensionnelle
\mathcal{F}_{xy}^{-1}	opération transformée de Fourier inverse spatiale
\mathcal{F}_t^{-1}	opération transformée de Fourier inverse temporelle
\mathcal{SF}_t^{-1}	opération transformée de Fourier inverse à court terme
\mathcal{L}_t^{-1}	opération transformée de Laplace inverse temporelle
P	transformée de Fourier tri-dimensionnelle de la pression
V	transformée de Fourier tri-dimensionnelle de la vitesse normale
G	transformée de Fourier tri-dimensionnelle de la fonction de Green
l_c	longueur caractéristique d'un défaut
k_c	nombre d'onde caractéristique d'un défaut
W_V	filtre de Veronesi
α_V	paramètre de forme du filtre de Veronesi
k_V	paramètre de coupure du filtre de Veronesi
Δ_x	pas spatial de l'antenne de microphones dans la direction x
Δ_y	pas spatial de l'antenne de microphones dans la direction y
Δ_t	pas d'échantillonnage temporel
N_x	nombre de points de mesure dans la direction x
N_y	nombre de points de mesure dans la direction y
N_t	nombre d'échantillons temporels
Λ	matrice de régularisation
λ	paramètre de régularisation
\mathbf{I}	matrice identité
$\hat{\mathbf{v}}$	vitesse régularisée (notation vectorielle)
\hat{V}	transformée de Fourier tri-dimensionnelle de la vitesse régularisée
\mathbf{n}	bruit de mesure (notation vectorielle)
α	variance de la fonction à priori
β	variance de la fonction de vraisemblance
E	module de Young
ν	taux d'amortissement
η	coefficient de Poisson

w	déplacement normal de la plaque
\mathbf{w}	déplacement normal de la plaque (notation vectorielle)
h	épaisseur de la plaque
f	résidu des équations du mouvement
\mathbf{f}	résidu des équations du mouvement (notation vectorielle)
\mathbf{T}_g	opérateur toeplitz de convolution avec la fonction de Green
\mathbf{C}_g	opérateur circulaire de convolution avec la fonction de Green
r_p	rayon du piston
γ	taux d'amortissement du piston
f_p	fréquence d'excitation du piston
M	indicateur d'erreur de norme
φ	indicateur d'accord de phase
α_d	coefficient de dispersion de la plaque
\mathbf{k}	noyau de convolution de la méthode RIFF
\mathbf{C}_k	opérateur circulaire de convolution avec le noyau de convolution \mathbf{k}
f_r	résidu régularisé des équations du mouvement
\mathbf{F}	matrice de transformée de Fourier tri-dimensionnelle
Δ	diagonalisation de \mathbf{C}_k
T	fenêtre de Tukey tri-dimensionnelle
\mathbf{D}	matrice de flexion de la plaque
m_0	masse surfacique de la plaque
$\tilde{\mathbf{k}}$	noyau de convolution de la méthode RIFF appliquée aux matériaux stratifiés
τ_n	paramètre de précision du bruit
τ_f	paramètre de précision du résidu
k_n	hyper-paramètre de forme pour la précision du bruit
k_f	hyper-paramètre de forme pour la précision du résidu
θ_n	hyper-paramètre d'intensité pour la précision du bruit
θ_f	hyper-paramètre d'intensité pour la précision du résidu
s	pourcentage définissant les intervalles de crédibilité

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Synopsis des méthodes d'holographie acoustique transitoire en champ proche	106
Annexe B	Circularisation d'un opérateur Toeplitz	110

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Contexte général

Dans un contexte économique de plus en plus mondialisé et compétitif, les entreprises ont intérêt à optimiser leurs coûts de fonctionnement. Cela est particulièrement vrai dans les secteurs concurrentiels, comme l'industrie des transports (aériens, routiers, ferroviaires ou maritimes). Pour les acteurs de ces secteurs, il est indispensable de s'assurer de la fiabilité des équipements qu'ils proposent, car les coûts de réparation et les pénalités financières engendrés lors d'une panne peuvent être très élevés. De plus, il est crucial pour ces entreprises de garantir la sécurité la plus totale de leurs équipements, car tout dysfonctionnement peut entraîner un coût humain (catastrophe aérienne), ou environnemental (accident sur un navire pétrolier) potentiellement catastrophique. Ce double enjeu de fiabilité et de sécurité a fait émerger la nécessité de développer des stratégies de maintenance sophistiquées pour déterminer en amont les risques d'accidents. La planification et la mise en oeuvre des opérations de maintenance sont donc d'une importance cruciale.

D'autre part, pour les acteurs des transports, un enjeu de réduction du poids des pièces, a poussé les constructeurs à utiliser des matériaux de plus en plus innovants. Il est devenu nécessaire de concevoir des pièces toujours plus fines et légères, par exemple en exploitant les avantages des matériaux composites en termes de ratio rigidité-masse, de résistance à la propagation de fissures et de résistance à la corrosion. De nos jours, l'omni-présence des composites dans le secteur de l'aviation civile est spectaculaire : la masse de l'Airbus A350 XWB est composée à 53% de matériaux composites, contre seulement 19% d'alliages d'aluminium. Malgré leurs avantages, les nouveaux matériaux utilisés pour concevoir certaines pièces structurales ont un comportement à long terme qui peut être complexe. Par exemple, les pièces composites peuvent être fragilisées par une délamination, et causer de graves incidents techniques, comme sur le vol Air Transat 961 où l'usure de pièces structurales a causé la perte d'une partie de la gouverne de direction. À cause de ces mécanismes complexes d'endommagement, on estime que 30% du coût effectif de ces pièces est consacré à l'inspection [1]. Pour réduire ces coûts d'inspection, un effort de recherche considérable est effectué pour développer des méthodes de contrôle non-destructif adaptées à divers types de matériaux et de situations, de manière à détecter d'éventuels défauts de fabrication en sortie de la chaîne d'assemblage, ou des signes d'usure lors des opérations de maintenance.

1.2 Méthodes d'inspection existantes

Dans ce contexte, un très grand nombre de méthodes de contrôle non destructif ont été développées. Une liste non exhaustive de ces méthodes n'entre pas dans le cadre de ce mémoire, cependant, un aperçu des solutions existantes est nécessaire pour comprendre les motivations des travaux présentés dans ce mémoire. Il existe une très grande variété de techniques d'inspection, c'est pourquoi il est comode de les regrouper dans différentes familles, selon leur principe de fonctionnement :

- La méthode d'inspection visuelle, qui consiste simplement à vérifier si des défauts sont visibles sur la surface de la pièce à inspecter à l'aide d'auxiliaires (loupe, endoscope flexible).
- Les méthodes d'inspection par magnétoscopie, dont le principe est d'induire un champ magnétique dans la pièce à inspecter, qui est perturbé par les défauts débouchants. Ces perturbations sont mises en évidence par un dépôt de particules métalliques.
- Les méthodes d'inspection par radiographie, qui consistent à placer une source de rayonnement d'un côté de la pièce à examiner, et une pellicule radiographique sensible au type de rayonnement choisi de l'autre côté.
- Les méthodes par ressurgage, où un agent pénétrant est appliqué sur la surface de la pièce étudiée, et permet de rendre visible les défauts débouchants lorsqu'ils sont observés sous un éclairage UV.
- Les méthodes par courants de Foucault, qui permettent d'inspecter les pièces métalliques en y induisant des courants de Foucault ce qui génère un champ magnétique. Ce champ magnétique peut être analysé pour détecter des défauts à la surface de la pièce.
- Les méthodes par émission acoustique, qui fonctionnent sur le même principe que les sismographes : l'apparition d'une fissure s'accompagne d'une redistribution soudaine des contraintes dans la pièce, ce qui génère des ondes élastiques qui se propagent dans le matériau, et peuvent être détectées en temps réel par des instruments adaptés.
- Les méthodes par ultrasons, qui exploitent les ondes mécaniques hautes fréquences (typiquement quelques MHz) envoyées dans la structure par un émetteur pour détecter les échos causés par les défauts.

Malgré la grande diversité de méthodes de contrôle non destructif, aucune technique n'est adaptée à toutes les situations. Il existe en effet des limites sur la compatibilité des matériaux (par exemple, les méthodes par magnétoscopie ne s'appliquent qu'aux matériaux ferromagnétiques), sur le type de défauts détectables (les méthodes par ressurgage ne détectent que

les défauts débouchants), sur la fiabilité du diagnostic (pour l’inspection visuelle), ou des contraintes pratiques (la radiographie requiert un équipement lourd, et les méthodes par ultrasons ne scannent que de petites zones). Par conséquent, ces techniques sont complémentaires, et sont presque toujours combinées lors des inspections. C’est par exemple le cas sur les systèmes d’inspection de rails embarqués à bord de locomotives développés par la société Sperry : les méthodes visuelles, par ultrasons et par courants de Foucault sont appliquées simultanément [2].

1.3 Contexte particulier

Le sujet de cette maîtrise porte sur l’utilisation de l’holographie acoustique en champ proche (en anglais *Nearfield Acoustical Holography*, ou NAH) comme moyen de mesure permettant le contrôle non destructif de certaines structures. La NAH est une méthode d’imagerie acoustique permettant d’observer en détail le champ acoustique rayonné par une structure en mouvement à l’aide d’une antenne de microphones placée dans le champ proche de la structure. Les grandeurs qui peuvent être calculées par cette méthode sont la pression, la vitesse particulaire, et le vecteur d’intensité. En particulier, il est possible d’observer le champ vibratoire d’une pièce en calculant la vitesse normale de l’air sur la surface de la structure, et en utilisant la propriété de continuité de la vitesse normale à l’interface solide-fluide. Cette possibilité est intéressante dans l’optique d’effectuer un contrôle non destructif, car il est raisonnable de supposer qu’en s’intéressant aux mouvements d’une pièce, il est possible d’y déceler des anomalies et de les lier à des défauts structuraux. De plus, de récents développements de la NAH permettent de traiter des signaux transitoires. Cela permet donc d’étudier le comportement de structures soumises à des excitations large-bande tout en ayant une vision claire de la propagation des fronts d’onde au cours du temps. Cependant, la simple observation du champ vibratoire d’une pièce ne suffit pas à détecter de manière fiable d’éventuels défauts. Il faut être en mesure de post-traiter ces données pour rendre l’inspection systématique et obtenir des indicateurs facilement interprétables. Pour ce faire, il existe différentes méthodes pour remonter aux défauts structuraux à partir du champ vibratoire d’une pièce.

Au regard de l’éventail de méthodes existantes, une technique basée sur la NAH permettrait de contourner plusieurs limitations couramment rencontrées. Premièrement, le fait de mener l’inspection à partir du champ acoustique supprime les contraintes sur le type de matériau inspecté (notamment sur son caractère conducteur, ou ferromagnétique), et n’est à priori pas restreinte aux défauts débouchants. De plus, en dimensionnant l’antenne correctement, il est possible d’inspecter de grandes zones en une seule mesure, ce qui permet de réduire le

temps nécessaire aux opérations de maintenance. En outre, une antenne de microphones est un instrument relativement dispendieux, comparé aux méthodes par radiographie, ou aux méthodes nécessitant une mesure optique, par exemple. La méthode par NAH a également l'avantage de ne nécessiter qu'une préparation minimale de la pièce : il n'est par exemple pas nécessaire de nettoyer scrupuleusement la pièce ou d'y appliquer un traitement de surface délicat, comme dans les méthodes par ressurgage. De plus, la pièce à étudier n'a besoin d'être accessible que sur une seule face, ce qui évite le démontage de la structure, qui peut être long et complexe. Enfin, la mesure par holographie acoustique ne présente aucun danger pour l'opérateur : aucun produit toxique n'est utilisé, et aucun rayonnement nocif n'entre en jeu.

L'approche globale adoptée au cours de cette maîtrise a donc été de développer une méthode d'holographie acoustique et une méthode d'inversion du champ vibratoire compatibles entre elles, et d'étudier leur couplage. Les travaux présentés dans ce mémoire ne constituent qu'une preuve de concept de cette approche, et pas une méthode parfaitement aboutie et prête à être utilisée dans un domaine industriel. Par conséquent, l'étude est ici restreinte à des plaques. Cette simplification peut sembler restrictive, mais en réalité, beaucoup de pièces structurales peuvent être considérées comme des assemblages de plaques ou coques présentant des zones planes.

Ce document est un mémoire par article qui est réparti entre huit chapitres. Après l'introduction, le second chapitre est une revue de littérature permettant de mettre en évidence les lacunes de l'état de l'art. Un court chapitre présente l'approche proposée et détaille les aspects méthodologiques de cette maîtrise. Le quatrième chapitre concerne la méthode de reconstruction holographique du champ de vitesse développée pour notre application. Cette partie est constituée d'un article soumis à la revue *Mechanical Systems and Signal Processing*. Le chapitre 5 détaille la méthode inverse de détection de défauts qui permet de post-traiter le champ de vitesse obtenu par NAH. Ce chapitre est présenté sous la forme d'un article accepté pour publication dans les actes de conférence de l'*International Congress of Sound and Vibration*. Le sixième chapitre présente un complément à cette méthode pour l'adapter à l'étude des matériaux stratifiés. Le septième chapitre discute du couplage entre la reconstruction par NAH et la méthode de détection de défauts, et propose une approche statistique fournissant un critère de décision pour la détection de défauts. Enfin, le huitième chapitre conclut sur l'ensemble du mémoire et énumère les pistes les plus prometteuses pour poursuivre le projet de recherche.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre vise à donner un aperçu des méthodes développées dans la littérature qui permettent d'observer le champ acoustique et vibratoire des structures à partir de mesures microphoniques. De plus, les familles de méthodes inverses d'identification de défauts s'appuyant sur le comportement vibratoire des pièces sont présentées. La critique de l'état de l'art servira à justifier les choix méthodologiques effectuées dans cette maîtrise, et permettra d'identifier certaines lacunes sur lesquelles se sont concentrés nos efforts.

2.1 Techniques existantes d'imagerie acoustique

2.1.1 Aperçu des principales familles

Le problème de la caractérisation des sources sonores est classique en acoustique, car il arrive souvent que les sources soient mal connues ou difficilement mesurables. Pour remédier à ce problème, de nombreuses méthodes d'imagerie ont été développées. Leur principe consiste à échantillonner le champ acoustique à l'aide d'une antenne de microphones, et à s'appuyer sur un modèle de propagation des ondes mettant en relation les sources à estimer avec le champ de pression mesuré. D'un point de vue formel, la relation s'écrit :

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (2.1)$$

où \mathbf{p} est un vecteur représentant le champ de pression mesuré, \mathbf{q} est un vecteur contenant les sources à estimer (selon les applications, \mathbf{q} est homogène à un débit, à une pression, ou à une vitesse particulière), et \mathbf{G} est l'opérateur linéaire représentant le modèle de propagation des ondes. Le calcul de \mathbf{p} à partir des sources est appelé le problème direct, et est généralement simple à résoudre. Le problème qui consiste à estimer \mathbf{q} est appelé le problème inverse, et nous verrons qu'il est généralement plus complexe à résoudre à cause de son instabilité.

Les techniques s'appuyant sur ce formalisme sont nombreuses, car cette approche est utilisée pour des applications très variées (vibro-acoustique, aéro-acoustique, acoustique sous marine). De manière générale, les méthodes d'imagerie acoustique diffèrent selon :

- la topologie de la source : sa géométrie, et sa distribution à priori.
- le type de modèle de propagation pris en compte : champ proche ou champ lointain, champ libre ou effets de réverbération, milieu dispersif ou non-dispersif, présence ou absence d'écoulement cisailé dans le fluide.

- les caractéristiques de l'antenne utilisée : sa géométrie, le nombre de microphones, et leurs caractéristiques.
- la plage de fréquences considérée, et le régime étudié (transitoire ou stationnaire).
- la forme de la matrice de transfert : dépendamment de sa taille, on résout un problème carré ou sous-déterminé.
- la manière pratique de calculer la solution.

L'enjeu de cette première sous-section est de situer l'holographie acoustique en champ proche, et de montrer en quoi cette méthode est la plus adaptée pour notre application.

Parmi les méthodes d'imagerie acoustique, on peut distinguer deux familles très différentes correspondant à deux manières de résoudre l'équation (2.1) [3].

D'une part, les méthodes par formation de faisceau (*beamforming* en anglais) [4] consistent à choisir des points de focus correspondant aux positions à priori des sources, puis à estimer directement \mathbf{W} , l'opérateur inverse de \mathbf{G} sans inverser le système. Ces méthodes sont simples à implémenter et permettent de s'intéresser à des sources placées loin de l'antenne (d'où son appellation de "téléscope acoustique", dans certains papiers des années 1970). Du point de vue physique, tous les degrés de liberté sont traités séparément, ce qui ne permet pas de prendre en compte les interférences constructives ou destructives pouvant survenir lorsque les sources sont corrélées. Cela entraîne d'importantes limitations lorsque la distribution des sources est trop dense, ou lorsque l'on s'intéresse aux ondes basses fréquences. De plus, la réponse de l'antenne pollue l'estimation des sources si aucune méthode de déconvolution n'est appliquée pour post-traiter le résultat (par exemple CLEAN [5], ou DAMAS [6]).

D'autre part, les méthodes inverses consistent à minimiser $\|\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{q}\|_2^2$. Ces méthodes sont généralement plus adaptées lorsque l'antenne de microphones est proche de la source à caractériser. Elles permettent en outre de prendre en compte le champ proche du champ acoustique et les effets de corrélation entre les sources : pour filer la métaphore sur l'optique, les méthodes inverses pourraient être qualifiées de "microscopes acoustiques", par opposition aux "téléscopes acoustiques". La contrepartie de ces avantages est que ces méthodes sont très instables : le champ de sources minimisant $\|\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{q}\|_2^2$ n'est pas nécessairement unique et dépend de manière critique du bruit de mesure sur le champ de pression. Les méthodes inverses nécessitent donc une stratégie de régularisation pour gérer l'instabilité du problème. De plus, les implémentations varient suivant les hypothèses sur la source et la manière dont on modélise l'opérateur \mathbf{G} . Par exemple, une distribution dense de monopoles est supposée dans la méthode des sources équivalentes [7]. La source peut également être vue comme

une distribution d’ondes planes avec un spectre continu, comme dans la méthode SONAH [8] (pour *Statistically Optimized Nearfield Acoustical Holography*), ou discret, comme en NAH [9] ou dans la méthode PWSM [10] (pour *Plane Wave Superposition Method*). Il est également fréquent de modéliser la source par une somme d’ondes sphériques [11] (méthode HELS : *Helmholtz Equation Least Squares*), ou bien par des fonctions d’ondes généralisées calculées par éléments de frontière (méthode IBEM : *Inverse Boundary Elements Method*) [12].

Pour appliquer une méthode d’imagerie acoustique dans le contexte du contrôle non destructif, il est nécessaire de reconstruire le plus précisément possible le comportement de la source. Il est donc préférable d’utiliser une méthode inverse plutôt que la formation de voies. D’autre part, comme nous l’avons précisé dans l’introduction, nous nous limitons ici aux sources planes, ce qui suggère d’utiliser une méthode basée sur la décomposition en ondes planes. Enfin, la méthode utilisée doit être efficace en termes de temps de calcul pour garantir l’applicabilité de notre approche : lors des opérations de maintenance, les techniciens utilisent généralement un équipement portable, il est donc souhaitable que les calculs numériques puissent se faire en quelques secondes sur un ordinateur portable. L’holographie acoustique plane en champ proche remplit chacun de ces critères, et semble donc être le meilleur candidat pour remplir les objectifs de cette maîtrise.

2.1.2 Modélisation du problème

2.1.2.1 Intégrale de Rayleigh

On considère ici une source plane soumise à une excitation qui génère un champ vibratoire que l’on souhaite mesurer. Les vibrations de la plaque mettent en mouvement le fluide dans lequel est plongé la plaque (ici, l’air), et ce mouvement se propage en s’éloignant de la source. Grâce à l’équation d’onde (qui régit la propagation acoustique), à l’équation d’Euler (qui relie le gradient de pression à la vitesse particulaire du fluide), il est possible de démontrer l’intégrale de Rayleigh (voir [13]), qui met en relation la pression en un point de l’espace avec les champs de vitesse et de pression au niveau de la surface d’une source acoustique :

$$p(x, y, d, t) = \frac{\rho_0}{2\pi} \iint \frac{\dot{v}(x_s, y_s, 0, t - \frac{R}{c})}{R} dx_s dy_s \quad (2.2)$$

où $R = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + d^2}$ est la distance entre le point d’observation (x, y, d) et le point où l’on calcule la pression $(x_s, y_s, 0)$, où v correspond à la vitesse normale de l’air à la surface de la plaque, et où c est la vitesse du son dans l’air. Cette vitesse est égale à la vitesse normale de la plaque d’après l’équation de continuité, ce qui permet de remonter au

comportement vibratoire de la source.

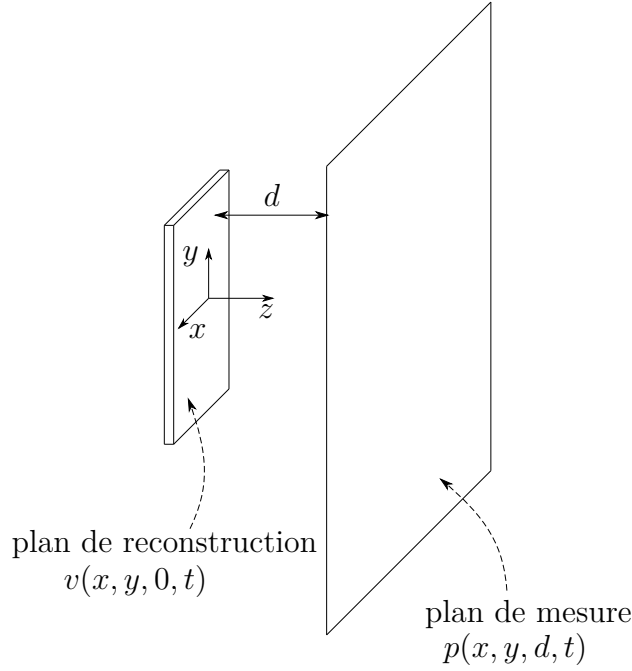


Figure 2.1 Schéma du problème acoustique inverse en configuration plane.

Cette relation peut être écrite sous la forme d'une convolution tri-dimensionnelle entre le champ de vitesse normale de la source et une fonction de Green :

$$p(x, y, d, t) = v(x, y, 0, t) * g(x, y, d, t) \quad (2.3)$$

$$= \iiint v(x_s, y_s, 0, t_s) \times g(x - x_s, y - y_s, d, t - t_s) dx_s dy_s dt_s. \quad (2.4)$$

La fonction de Green g peut être exprimée à l'aide de la fonction de Dirac :

$$g(x, y, d, t) = \frac{\rho_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \delta\left(t - \frac{R}{c}\right). \quad (2.5)$$

Cette relation est souvent exprimée à l'aide de la transformée de Fourier et de sa propriété de convolution suivant les dimensions x , y , et t . La transformée de Fourier tri-dimensionnelle (selon les dimensions x , y , et t) notée \mathcal{F} permet en effet de transformer une convolution en

une multiplication. En notant :

$$P(k_x, k_y, d, \omega) = \mathcal{F}(p(x, y, d, t)), \quad (2.6)$$

$$V(k_x, k_y, 0, \omega) = \mathcal{F}(v(x, y, 0, t)), \quad (2.7)$$

$$G(k_x, k_y, d, \omega) = \mathcal{F}(g(x, y, d, t)), \quad (2.8)$$

on a :

$$P(k_x, k_y, d, \omega) = V(k_x, k_y, 0, \omega) \times G(k_x, k_y, d, \omega) \quad (2.9)$$

Cette formulation fréquentielle est largement utilisée dans la littérature, car l'expression de la fonction de Green dans le domaine fréquentiel est simple. En effet, en notant k_x et k_y les nombres d'ondes associés aux coordonnées x , et y , et ω la fréquence temporelle, la fonction de Green s'écrit [14] :

$$G(k_x, k_y, d, \omega) = \frac{\rho_0 \omega}{k_z} e^{ik_z d}, \quad (2.10)$$

avec $k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}$.

2.1.2.2 Rayonnement acoustique d'une source plane

En observant la forme de la fonction de Green G présentée à la figure 2.2, il est clair que le rayonnement acoustique s'effectue selon deux régimes distincts :

- le régime propagatif, lorsque $\frac{\omega^2}{c^2} > k_x^2 + k_y^2$. Dans ce cas, k_z est réel, et $e^{ik_z d}$ est de module 1, et l'argument correspond à un déphasage dû à la propagation de l'onde. Les ondes propagatives sont donc les composantes qui se retrouvent dans le champ lointain de la plaque.
- le régime évanescent, lorsque $\frac{\omega^2}{c^2} < k_x^2 + k_y^2$. Dans ce cas, k_z est imaginaire pur, et $e^{ik_z d}$ est une fonction décroissante de d . Les ondes évanescentes sont donc fortement atténuées lorsque l'on s'éloigne de la source, et deviennent indétectables dans le champ lointain.

La différence entre ces deux types d'ondes est illustrée par la figure 2.3. Pour reconstituer la source, il faut reconstruire le plus fidèlement possible l'ensemble des composantes du champ de vitesse, y compris les composantes évanescentes. Ces ondes évanescentes étant fortement atténuées au fur et à mesure que la distance de propagation augmente, leur amplitude peut devenir comparable à celle du bruit de mesure. Dans ce cas, durant l'opération de rétro-propagation, le bruit sera lui aussi amplifié par un facteur exponentiel : $e^{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} d}$. La solution obtenue après rétro-propagation est donc très sensible aux imprécisions dans

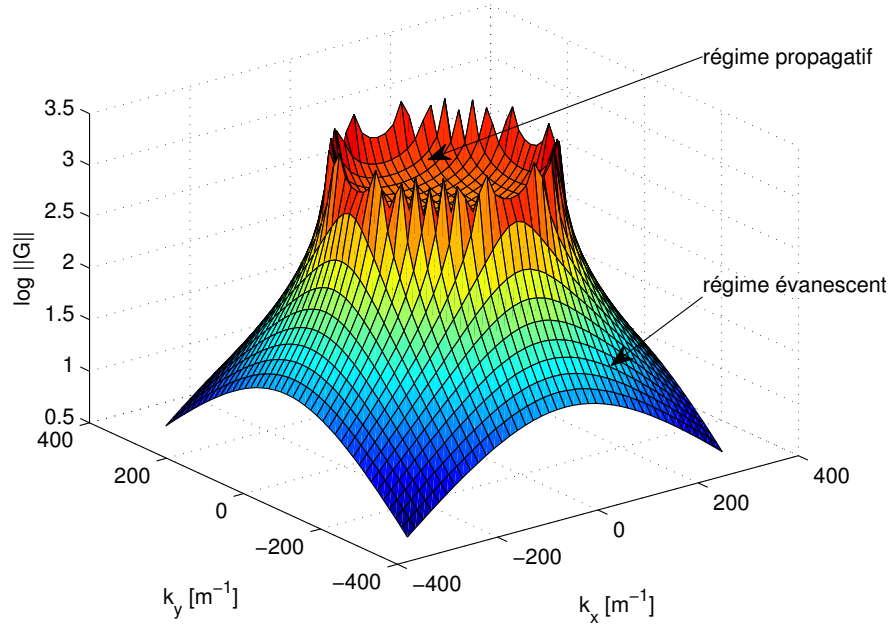


Figure 2.2 Log-amplitude de la fonction de Green dans le domaine de Fourier, pour une fréquence $f = 40$ kHz, et une distance de propagation de $d = 5$ cm.

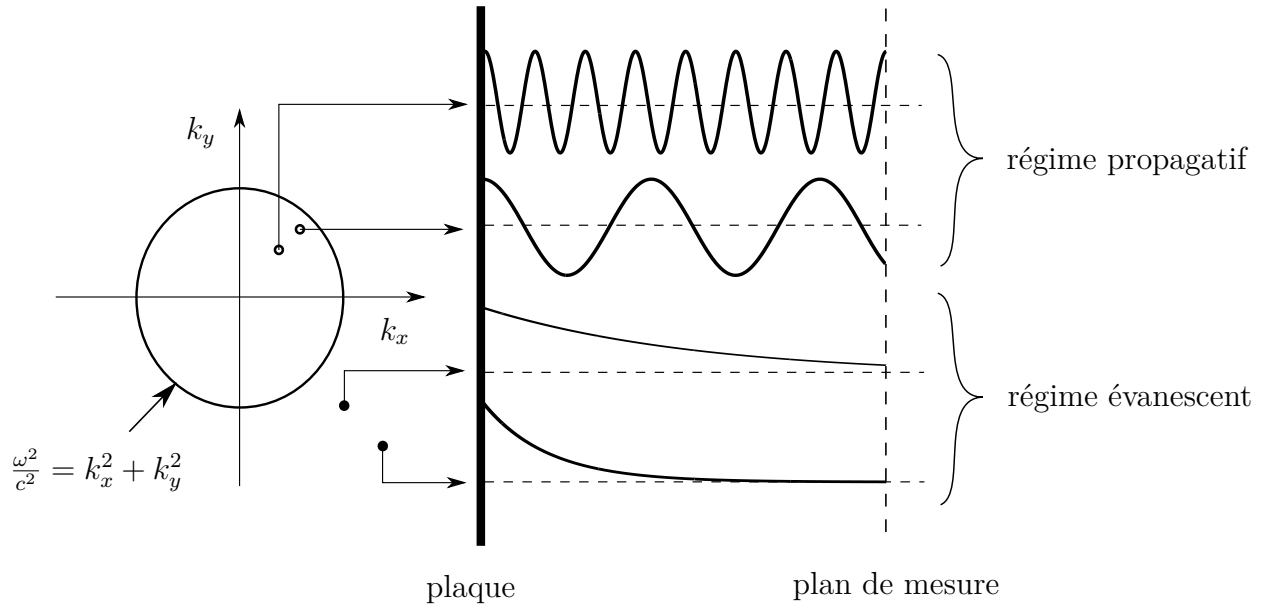


Figure 2.3 Illustration du comportement des ondes propagatives et évanescentes, pour une fréquence ω donnée, adapté de [15].

la mesure du champ de pression. Cette amplification du bruit lors de la rétro-propagation constitue toute la difficulté des méthodes inverses d'imagerie acoustique.

2.1.2.3 Remarque sur la contribution des défauts

Considérons une plaque comportant un défaut défini par une longueur caractéristique l_c . Si l'on suppose que ce défaut engendre une perturbation locale du champ vibratoire, on doit s'attendre à ce que cette perturbation soit concentrée sur les nombres d'onde de l'ordre de :

$$k_c \approx \frac{\pi}{l_c}. \quad (2.11)$$

Pour qu'une composante (k_x, k_y, ω) du champ vibratoire de la plaque génère une onde propagative, on doit avoir $\frac{\omega^2}{c^2} > k_x^2 + k_y^2$. Le défaut dans la plaque génère donc des ondes propagatives si :

$$\frac{\omega^2}{c^2} > k_c^2, \quad (2.12)$$

soit :

$$\omega > \frac{c\pi}{l_c} \quad (2.13)$$

Si cette condition est remplie, alors la rétro-propagation des composantes perturbées par la présence du défaut se fait facilement, car il s'agit de composantes propagatives. Si cette condition n'est pas remplie, alors la trace du défaut dans le champ acoustique rayonné est essentiellement contenue dans le champ proche de la plaque. Pour assurer la détection des défauts, la reconstruction précise des ondes évanescentes est donc nécessaire, puisque c'est uniquement dans cette partie du champ acoustique que se trouve le maximum d'informations.

Cela n'est possible que si la distance de rétro-propagation est suffisamment faible, et si la mesure de la pression est suffisamment précise. La relation (2.13) indique de plus que des défauts de petite taille génèrent essentiellement des ondes évanescentes, et que pour faire en sorte qu'ils rayonnent un champ propagatif, il faut fournir une forte excitation en hautes fréquences. Par exemple, si l'on souhaite détecter un défaut de taille caractéristique $l_c = 3$ cm, le champ perturbé ne sera propagatif que pour des fréquences supérieures à environ 10 kHz. Or, plus la fréquence considérée est élevée, plus le nombre d'onde de flexion naturel de la plaque est élevé. Le champ de pression rayonné correspondant comporte donc des variations spatiales très resserrées, ce qui implique que l'antenne microphonique doit être très dense pour respecter le critère de Shannon. En effet, pour respecter ce critère, il faut que toutes les ondes mesurées par l'antenne aient une longueur d'onde deux fois plus grande que l'espacement entre deux microphones. Du point de vue pratique, il est donc préférable de s'appuyer sur une reconstruction des ondes évanescentes, quitte à mesurer le champ de pression à une distance très proche de la source, et à faire en sorte que le rapport signal sur bruit soit le meilleur

possible.

En outre, pour maximiser la probabilité de détection des défauts, il est préférable d'exciter la plaque sur une large bande de fréquences. Pour cela, il est possible d'utiliser un pot vibrant excitant la structure avec un balayage fréquentiel. Une alternative est d'utiliser une excitation transitoire de type impact pour exciter une grande partie du spectre en une seule mesure. En principe, ces deux approches sont équivalentes. Cependant, il est difficile d'appliquer une vibration parfaitement sinusoïdale en très basses fréquences avec un pot vibrant. De plus, l'approche transitoire permet de générer des fronts d'ondes dont la perturbation par un défaut peut être visible même sans post-traitement du signal. Les méthodes d'holographie acoustiques transitoires semblent donc intéressantes du point de vue de notre application.

2.1.3 Gestion du problème inverse

Dans la sous-section précédente, il est montré que pour obtenir un maximum d'informations sur la source, il est nécessaire de rétro-propager le champ mesuré. Nous avons aussi vu que cette opération est instable, car très sensible au bruit de mesure. En réalité, la sensibilité des variables de sortie d'un problème aux erreurs des variables d'entrée est caractéristique d'un problème de déconvolution, et plus généralement d'un problème inverse. Ce type de problème est fréquemment rencontré dans le milieu industriel, où la quantité physique d'intérêt n'est pas directement mesurable. Dans ce cas, l'idée est d'étudier les effets du phénomène (dans notre cas, le rayonnement acoustique) physique pour en déterminer ses causes (ici, la vitesse normale de la source).

Il existe principalement deux stratégies de régularisation utilisées en acoustique. La première consiste à utiliser un filtre choisi à l'avance pour éliminer les oscillations dues à l'amplification du bruit. La seconde stratégie consiste à ajouter un terme de pénalité au problème de minimisation de $\|\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{v}\|_2^2$.

2.1.3.1 Régularisation par filtrage *ad-hoc*

Les premières applications de l'holographie acoustique utilisent le filtrage de Veronesi [16] qui s'appuie sur une interprétation physique du problème. Cette technique consiste à appliquer un filtre passe-bas $W_V(k_x, k_y, \omega)$ dans l'espace des nombres d'ondes à la solution naïve P/G pour limiter la contribution des ondes évanescentes :

$$\hat{V}(k_x, k_y, 0, \omega) = W_V(k_x, k_y, \omega) \times \frac{P(k_x, k_y, d, \omega)}{G(k_x, k_y, d, \omega)} \quad (2.14)$$

Le filtre recommandé par Veronesi *et al.* dépend de deux paramètres α_V et k_V qui doivent être ajustés manuellement. En notant $k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, ce filtre est donné par :

$$W_V(k_x, k_y, \omega) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{(\frac{k_r}{k_V} - 1)/\alpha_V}}{2}, & \text{si } k_r \leq k_V \\ \frac{e^{-(1 - \frac{k_r}{k_V})/\alpha_V}}{2}, & \text{si } k_r > k_V \end{cases} \quad (2.15)$$

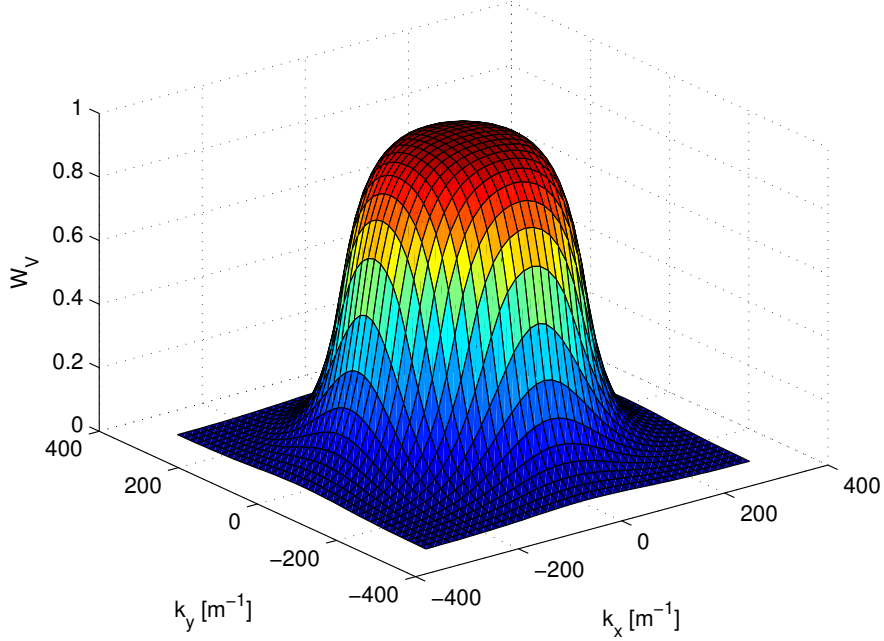


Figure 2.4 Amplitude du filtre de Veronesi pour $\alpha_V = 0,2$ et $k_V = 188 \text{ m}^{-1}$.

Dans [16], des valeurs permettant d'obtenir des résultats satisfaisants sont recommandées : $\alpha_V = 0,2$ et $k_V = \frac{0,6\pi}{\Delta_x}$, où Δ_x est le pas spatial de l'antenne de microphones dans la direction x (ici, $\Delta_x = \Delta_y$). Comme illustré à la figure 2.4, ce filtre permet d'atténuer l'effet des composantes évanescentes. Ce filtre permet une régularisation relativement simple du problème inverse, cependant, il ne dépend ni du rapport signal sur bruit de la mesure, ni de la fréquence considérée, ni de la distance de propagation, qui sont pourtant des facteurs déterminants pour ajuster le niveau de régularisation souhaité.

2.1.3.2 Régularisation additive

L'alternative aux méthodes de filtrage *ad hoc* est la régularisation additive. L'idée derrière cette technique est de régulariser le problème en relaxant la contrainte de nullité du résidu

$\|\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{v}\|_2^2$. On cherche donc à trouver le champ vibratoire v qui minimise une fonction coût de la forme :

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{\Lambda}\hat{\mathbf{v}}\|_n^n \quad (2.16)$$

où $\mathbf{\Lambda}$ est appelée matrice de régularisation, et $\|\cdot\|_n$ désigne la norme n , avec $n \geq 1$. Dans la plupart des méthodes d'imagerie acoustique, on choisit $\mathbf{\Lambda} = \sqrt{\lambda}\mathbf{I}$, λ étant un réel positif, et \mathbf{I} étant la matrice identité. Suivant la valeur assignée à n , la quasi-solution sélectionnée par le problème (2.16) est différente.

2.1.3.2.1 Régularisation de Tikhonov Le choix le plus commun est $n = 2$. Dans ce cas, on parle de régularisation de Tikhonov [17] (ou *ridge regression* en anglais). L'idée est d'ajouter à la fonction coût initiale $\|\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{v}\|_2^2$ un terme qui pénalise les solutions d'énergie élevée. Le paramètre λ sert à sélectionner le compromis fait entre le résidu du problème et la norme de la solution. Avec un paramètre de régularisation élevé, la solution sera peu susceptible de contenir des composantes dues à l'amplification du bruit de mesure, mais les composantes à reconstruire pourront être atténuées du même coup. Avec un paramètre de régularisation faible, toutes les composantes du signal à reconstruire seront présentes, mais elles pourront être noyées dans le bruit amplifié par la matrice \mathbf{G} . Cette méthode est très répandue, car la minimisation de la fonction coût (2.16) dans le cas $n = 2$ a une solution explicite, que l'on peut exprimer en fonction de \mathbf{G} et de sa transposée :

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{G}^\top \mathbf{G} + \mathbf{\Lambda}^\top \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{G}^\top \mathbf{p} \quad (2.17)$$

Williams [18] propose une implémentation de la régularisation de Tikhonov adaptée au cas de l'holographie acoustique. Dans le cadre de la NAH, la solution régularisée (2.17) peut s'exprimer dans le domaine de Fourier :

$$\hat{V} = \frac{|G|^2}{|G|^2 + |\Lambda|^2} \frac{P}{G} \quad (2.18)$$

Williams propose également d'appliquer plusieurs régularisations de Tikhonov successives au problème, ce qui permet une meilleure sélection des composantes à garder et à filtrer, et dans certains cas, d'obtenir des reconstructions plus fidèles que l'utilisation du filtre de Tikhonov standard.

2.1.3.2.2 Régularisation parcimonieuse Lorsque l'on choisit de pénaliser la solution avec une norme ℓ_1 , on parle de régularisation parcimonieuse, et la solution sélectionnée est différente : les petites valeurs de \mathbf{v} seront plus pénalisées que dans le cas de la régularisation

de Tikhonov. Par conséquent, contrairement à la régularisation ℓ_2 qui étale l'énergie de la source dans le domaine temporel et spatial, la régularisation parcimonieuse favorise les solutions dont l'énergie est concentrée en certaines zones. Cela permet de respecter la causalité de la source à reconstruire, c'est à dire d'obtenir un champ de vitesse parfaitement nul aux instants précédant la mise en mouvement de la source, et aux positions (x, y) extérieures à la source. Jean-Michel Attendu (un ancien doctorant du LAVA) et Annie Ross ont montré que ce type de régularisation est avantageux pour des sources acoustiques transitoires [19] : la reconstruction du signal sur les portions où la solution est nulle est mieux approximée par la solution parcimonieuse. En revanche, en dehors de ce régime, les valeurs de la solution sont généralement mieux approximées par la régularisation de Tikhonov. La régularisation parcimonieuse a cependant l'inconvénient d'être très coûteuse à implémenter. En effet, la fonction coût n'est plus différentiable, et sa minimisation ne peut donc pas se faire analytiquement. Dès lors que la taille des jeux de données devient réaliste (quelques dizaines de points dans chaque direction spatiale, et quelques centaines d'échantillons temporels), le calcul de la solution est un problème d'optimisation portant sur plusieurs centaines de milliers de variables, qu'il est délicat de résoudre efficacement.

2.1.3.2.3 Régularisation par filet élastique Il est possible de combiner les approches $n = 1$ et $n = 2$ en utilisant la régularisation par filet élastique (*elastic net regularization* en anglais) qui impose un terme de pénalité ℓ_1 et un terme de pénalité ℓ_2 :

$$\|\mathbf{G}\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{p}\|_2^2 + \lambda_1 \|\hat{\mathbf{v}}\|_1 + \lambda_2 \|\hat{\mathbf{v}}\|_2^2 \quad (2.19)$$

Cette méthode a déjà été appliquée en imagerie acoustique pour la méthode de formation de voies [20], et pour la reconstruction du champ sonore d'une source [21]. La fonction coût elastic net ne peut pas être minimisée analytiquement, elle nécessite donc une résolution numérique qui peut être difficile suivant la taille du domaine à étudier.

2.1.3.3 Sélection du paramètres de régularisation

Les différentes stratégies de régularisation nécessitent toujours un paramètre pour contrôler la quantité de régularisation que l'on souhaite appliquer à notre solution. Il existe un panel de méthodes permettant de le choisir de manière optimale. Ces méthodes sont importantes car la solution peut être sensiblement affectée par ce choix.

2.1.3.3.1 Courbe en L La méthode de la courbe en L [22] peut être utilisée pour choisir le paramètre λ optimal dans le cas d'une régularisation ℓ_2 . Lorsque l'on s'intéresse à une

régularisation ℓ_1 , il est possible de définir des méthodes analogues, comme la méthode de la courbe de frontière de Pareto [23]. L'idée de la méthode est de tracer un graphe représentant la norme de la solution $\|\mathbf{v}\|_2$ en fonction du résidu $\|\mathbf{G}\mathbf{v} - \mathbf{p}\|_2$, pour différentes valeurs de λ . La courbe obtenue a généralement l'allure de la courbe présentée à la figure 2.5, d'où son nom de courbe en L. Le meilleur compromis entre la stabilité de la solution et la minimisation du

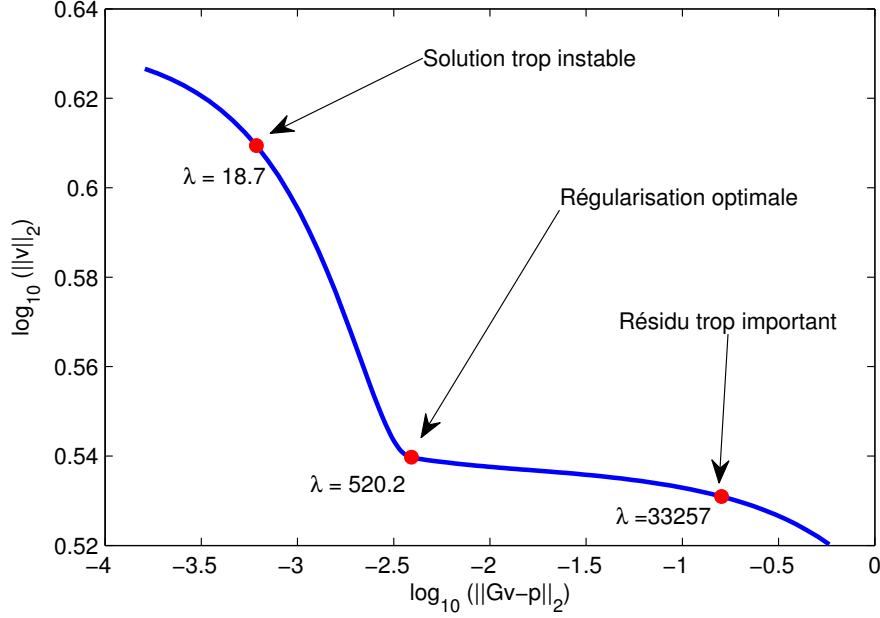


Figure 2.5 Courbe en L obtenue sur un exemple numérique, représentée sur une échelle logarithmique.

résidu correspond au point situé au creux de la courbe en L. Il est donc possible d'exprimer la courbure de la courbe en L comme une fonction de λ que l'on cherche à maximiser.

2.1.3.3.2 Validation croisée généralisée La méthode par validation croisée généralisée [24, 25] s'appuie sur la minimisation du ratio :

$$J_{GCV}(\lambda) = \frac{\frac{1}{N} \|\mathbf{G}\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{p}\|_2^2}{\frac{1}{N} \text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T)^2} \quad (2.20)$$

où $\text{Tr}(\cdot)$ représente l'opérateur trace. J_{GCV} représente le ratio entre le poids du résidu et la force du filtrage. Si λ est trop faible, le filtrage de la solution n'est pas suffisant, donc le dénominateur tend vers zero. Si λ est trop grand, le résidu devient trop important, et le numérateur augmente. Le paramètre optimal au sens de la validation croisée généralisée est donc celui qui donne le plus faible ratio J_{GCV} entre ces deux cas extrêmes.

2.1.3.3.3 Méthode Bayésienne empirique L'approche bayésienne se base sur une interprétation probabiliste du problème inverse acoustique. L'idée est d'affecter une densité de probabilité à chaque terme de l'équation :

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{n} \quad (2.21)$$

où \mathbf{n} représente le bruit de mesure polluant la pression \mathbf{p} . En affectant une densité de probabilité Gaussienne de moyenne nulle et de variance β^2 (notée $\mathcal{N}(0, \beta^2)$) au bruit de mesure, on en déduit que la densité de probabilité du champ de pression est :

$$[\mathbf{p}|\mathbf{v}, \beta^2] = \mathcal{N}(\mathbf{G}\mathbf{v}, \beta^2) \quad (2.22)$$

Cette densité de probabilité est aussi appelée fonction de vraisemblance. La densité de probabilité de la source, aussi appelée densité de probabilité à priori, représente la répartition des valeurs admissibles pour le champ de vitesse, et est supposée de la forme :

$$[\mathbf{v}|\alpha^2] = \mathcal{N}(0, \alpha^2) \quad (2.23)$$

Le choix d'une densité de probabilité à priori peut être affiné en fonction des informations que l'on a sur la source, mais choisir une densité Gaussienne permet de simplifier les calculs pour mener la régularisation. À l'aide du théorème de Bayes et des hypothèses formulées plus haut, il est possible d'exprimer la densité de probabilité a posteriori de la source :

$$[\mathbf{v}|\mathbf{p}, \alpha^2, \beta^2] \propto [\mathbf{p}|\mathbf{v}, \beta^2] \times [\mathbf{v}|\alpha^2] \quad (2.24)$$

Au sens bayésien, la meilleure estimation possible du champ de vitesse est celle qui maximise la densité de probabilité a posteriori. Dans le cas où la densité à priori et la fonction de vraisemblance sont supposées Gaussiennes, trouver $\argmax([\mathbf{v}|\mathbf{p}, \alpha^2, \beta^2])$ revient à trouver $\argmin(\|\mathbf{G}\mathbf{v} - \mathbf{p}\|_2^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\|\mathbf{v}\|_2^2)$. Autrement dit, ce problème revient à calculer la solution régularisée au sens de Tikhonov. Dans ce contexte Bayésien, la technique de régularisation proposée par Pereira *et al.* consiste à exprimer la densité de probabilité $[\lambda = \frac{\beta^2}{\alpha^2}|p]$ et à trouver le paramètre qui maximise cette densité. Il est démontré que cette opération se réduit à un problème d'optimisation sur une fonction d'une seule variable :

$$J_B = \sum_i \ln(|G|^2 + \lambda) + N \ln \left(\frac{1}{N} \sum_i \frac{|P|^2}{|G|^2 + \lambda} \right) \quad (2.25)$$

En définitive, nous avons vu que la régularisation permet de contrecarrer l'instabilité du problème. Cependant, nous avons aussi pointé le fait qu'en choisissant une stratégie de régularisation et un paramètre de régularisation, on introduit obligatoirement un biais dans la solution. Or, le champ obtenu après rétro-propagation devra être post-traité pour appliquer un algorithme de détection de défauts. Il est donc important de tenir compte de ce biais dans le résultat de l'algorithme de détection de défauts, et de pouvoir en mesurer les effets sur la sensibilité de l'algorithme d'inspection.

2.1.4 Implémentations de la NAH transitoire

Les manières d'implémenter l'holographie acoustique transitoire en champ proche sont comparées dans cette section. Plus précisément, les différentes manières d'échantillonner la fonction de Green et d'effectuer la déconvolution sont comparées. Pour chaque technique présentée, un schéma représentant le synopsis de la méthode est présenté en annexe.

2.1.4.1 Time Method

L'implémentation de la Time Method proposée par Deblauwe *et al.* [26] est l'une des premières techniques proposées pour utiliser l'holographie acoustique en régime transitoire. Elle se base sur une formulation dans le domaine nombre d'ondes-fréquences. L'acquisition de la pression $p(x, y, d, t)$ est utilisée pour calculer le spectre temporel $p(x, y, d, \omega)$. Pour chaque fréquence ω_i , la méthode de Williams est appliquée et permet de reconstruire $v(x, y, 0, \omega_i)$. Dans cette implémentation, la fonction de Green est échantillonnée dans le domaine nombre d'onde-fréquence. Une fois que tout le spectre du champ de vitesse est reconstitué, une transformée de Fourier inverse est utilisée pour visualiser le signal de vitesse dans le domaine temporel. Cette méthode ne tient pas compte des fuites spectrales causées par l'échantillonnage de la fonction de Green dans le domaine $k_x - k_y - \omega$. Étant donné qu'elle effectue une déconvolution circulaire, les phénomènes de recouvrement (appelé *wrap-around* dans la littérature) peuvent également générer d'importantes erreurs de reconstruction. De plus, la technique suppose d'utiliser une fenêtre d'acquisition temporelle suffisamment longue pour capter la totalité du signal. Cette méthode est donc applicable aux signaux transitoires, mais lorsque l'on étudie de longs signaux non-stationnaires, le nombre de données à traiter devient considérable.

2.1.4.2 Time Domain Nearfield Acoustical Holography

La méthode Time-Domain Nearfield Acoustical Holography (TD-NAH) a été proposée par Hald pour être implémentée sur le système *Non-stationary Spatial Transformation of Sound Fields* commercialisé par Brüel & Kjaer [27]. Elle permet de calculer l'évolution temporelle de chaque composante fréquentielle du champ rétro-propagé grâce à l'application d'une transformée de Fourier à court terme. L'idée est de découper le signal mesuré en blocs temporels centrés sur des instants t_i , et de prendre leur transformée de Fourier, après avoir appliqué un fenêtrage adéquat. Pour chaque fréquence ω_j , on connaît alors le champ de pression $p(x, y, d, \omega_j)|_{t_i}$ pour les instants t_i successifs. Chacune de ces composantes est rétro-propagée pour obtenir $v(x, y, 0, \omega_j)|_{t_i}$. En sortie, on obtient l'évolution de chaque composante de fréquence ω_j en fonction des différents instants t_i . Le signal temporel $v(x, y, 0, t)$ peut ensuite être reconstruit par transformée de Fourier inverse à court terme.

Cette technique dépasse certaines limitations de la Time Method : il est en effet possible de rétro-propager des signaux longs, étant donné qu'elle traite le champ de pression par petits blocs temporels successifs. En revanche, le principe d'incertitude prévoit que la taille des blocs est un facteur limitant pour obtenir une bonne résolution fréquentielle, ce qui est nécessaire à la bonne reconstruction dans le domaine temporel. De plus, l'étape de rétro-propagation est identique à celle utilisée dans la Time Method. Les signaux reconstruits sont donc également affectés par la fuite spectrale et le recouvrement.

2.1.4.3 Transient Nearfield Acoustical Holography

Jean-François Blais (un ancien étudiant du LAVA) et Annie Ross [28] proposent une technique de rétro-propagation des grandeurs acoustiques adaptée aux signaux transitoires. Cette méthode repose sur une formulation de l'holographie acoustique exprimée dans le domaine de Laplace qui est initialement conçue pour résoudre le problème direct (*i.e.* calculer le champ de pression sur un plan de côte $z > d$). La fonction de Green est exprimée dans le domaine nombre d'ondes-paramètre de Laplace :

$$g(k_x, k_y, d, s) = -\frac{i\rho_0 s}{k_z} e^{ik_z d} \quad (2.26)$$

avec $s = -\sigma + i\omega$, et $k_z^2 = \frac{s^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2$. Le facteur σ est un facteur d'amortissement positif et sert à atténuer l'effet du recouvrement. Une méthode a été proposée par Attenu et Ross pour choisir de manière efficace le facteur qui optimise la qualité de la convolution [29]. Si cette formulation dans le domaine de Laplace est très efficace en propagation directe, elle est sensiblement plus délicate à mettre en place en rétro-propagation [30], car il est nécessaire

d'effectuer une double régularisation de Tikhonov. La première est analogue à celle appliquée dans les méthodes basées sur la transformée de Fourier et consiste à limiter la contribution des ondes évanescentes à la vitesse reconstruite dans le domaine de Laplace $\tilde{v}(x, y, 0, s)$. La seconde a pour but de contrecarrer l'instabilité intrinsèque à la transformée de Laplace inverse qui implique une multiplication du signal par $e^{\sigma t}$. De plus, un fenêtrage dans le domaine de Laplace est parfois nécessaire pour éviter le phénomène de Gibbs. En outre, l'échantillonnage de la fonction de Green dans le domaine des nombres d'ondes génère de la fuite spectrale et du recouvrement spatial.

2.1.4.4 Real Time Nearfield Acoustical Holography

La méthode temps réel (RT-NAH) permet une résolution du calcul en temps réel. Originellement développée pour résoudre le problème direct [31], cette formulation a ensuite été utilisée pour reconstruire la pression dans le champ proche de la source [32], puis a été adaptée par Zhang *et al.* pour calculer la vitesse normale de la source [33]. Une fois que le champ de pression $p(x, y, d, t)$ est mesuré, sa transformée de Fourier spatiale $p(k_x, k_y, d, t)$ est calculée. Pour chaque couple de nombre d'ondes (k_x, k_y) , la pression est mise en relation avec la vitesse à l'aide d'un opérateur Toeplitz. Cet opérateur est régularisé par la méthode de Tikhonov pour retrouver $v(k_x, k_y, 0, t)$. Une fois que cette opération est effectuée pour toutes les combinaisons de nombres d'ondes, le champ de vitesse est exprimé dans le domaine direct par transformée de Fourier inverse selon x et y . Lors de la construction de l'opérateur \mathbf{G} , la fonction de Green est échantillonnée dans le domaine nombre d'ondes-temps. Son expression est :

$$g(k_x, k_y, d, t) = \rho_0 c \delta(t - \frac{R}{c}) - \rho_0 c^2 t \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\sqrt{t^2 - (d/c)^2}} J_1\left(c \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \sqrt{t^2 - (d/c)^2}\right) H(t - \frac{R}{c}) \quad (2.27)$$

où J_1 est la fonction de Bessel du premier type d'ordre 1, et H est la fonction de Heaviside. Le fait d'échantillonner la fonction de Green dans le domaine $k-t$ supprime l'effet de fuite spectrale dans la dimension du temps, puisqu'aucune transformée de Fourier inverse temporelle n'est appliquée. De plus, l'opérateur \mathbf{G} représente bien une convolution linéaire le long de la dimension temporelle, l'effet du recouvrement temporel est donc annulé. Cependant, la fuite spectrale et le recouvrement causés par les opérations dans le domaine des nombres d'ondes n'est pas évitée avec cette formulation. De plus, les travaux de Grulier *et al.* suggèrent qu'une étape de filtrage de la fonction de Green est nécessaire lors de son échantillonnage. La forme du filtre semble avoir un effet significatif sur la reconstruction des signaux, bien que cela ne soit pas mentionné dans l'article de Zhang. Outre ces inconvénients, la RT-NAH ne suppose

pas l'acquisition du signal sur la totalité de sa durée, et permet de reconstituer le champ de vitesse à un pas de temps donné sans avoir besoin d'attendre la fin de l'acquisition, d'où son appellation "temps réel".

2.1.4.5 Time–Space Domain Nearfield Acoustical Holography

La méthode TSD-NAH est une technique proposée par Attendu et Ross [34]. Comme son nom l'indique, elle repose sur une formulation dans le domaine temps–espace qui permet de déterminer la pression sur un plan parallèle à la source. Dans le cas où ce plan de reconstruction est situé plus loin de la source que le plan de mesure, il est démontré que la reconstruction est quasiment exempte d'erreurs, et que ces erreurs sont indépendantes de la distance de propagation [35]. Dans le cas du problème inverse, lorsque le plan de reconstruction est situé entre le plan de mesure et la source, une méthode est également proposée pour reconstruire efficacement le champ de pression [36].

Dans ce formalisme, la relation de convolution qui lie la pression sur le plan de mesure p_m et sur le plan de reconstruction p_s est exprimée par une matrice Toeplitz par blocs circularisée [37]. L'opération de circularisation est explicitée en annexe sur un cas simple unidimensionnel. Ce formalisme permet une déconvolution linéaire dans le domaine temporel et spatial. Son efficacité computationnelle vient du fait qu'il n'est pas nécessaire de construire explicitement la matrice \mathbf{G} , ce qui permet de rétro-propager des signaux constitués de plusieurs millions de points. En outre, il est montré que les techniques de régularisation classiques (régularisation de Tikhonov et parimonieuse) sont compatibles avec ce formalisme [19, 36]. De plus, cette méthode suppose un échantillonnage de la fonction de Green dans le domaine temps–espace (voir équation (2.5)), ce qui permet de s'affranchir des problèmes de recouvrement et de fuite spectrale dans les trois dimensions. En dépit de ces avantages, la méthode TSD-NAH ne permet pas de reconstruire les signaux de manière continue comme la RT-NAH, et elle ne permet pas de traiter des signaux de plus de quelques millisecondes sans faire augmenter considérablement le temps de calcul. Elle est uniquement adaptée à la reconstruction de champs transitoires causaux, et pas à des signaux non-stationnaires à variation lente. Cette méthode est pour le moment la plus performante pour la reconstruction de champs de pression non-stationnaires et causaux, mais elle n'a pas encore été étudiée pour calculer des hologrammes de vitesse normale. Il serait donc intéressant d'adapter ce formalisme pour retrouver la vitesse normale de la plaque, et de vérifier si la suppression du recouvrement et de la fuite spectrale améliorent significativement la qualité de la reconstruction.

2.2 Méthodes d'identification inverse de défauts

2.2.1 Méthodes globales et méthodes variationnelles

Certaines méthodes rudimentaires de détection de défauts sont utilisées par l'homme depuis plusieurs millénaires : les artisans potiers sont capables de déceler la présence de fissures dans une pièce céramique en écoutant la résonance créée par un léger impact. Depuis les années 1980, un considérable effort de recherche a été effectué pour développer des méthodes plus sophistiquées basées sur la réponse dynamique des objets. Le développement d'outils d'instrumentation et l'avènement du calcul numérique ont permis de nombreuses avancées dans ce domaine. Les premiers travaux utilisent surtout des méthodes basées sur la décomposition modale [38–41]. Ces méthodes consistent à comparer les déformées modales ou les fréquences propres de la structure inspectée à celles d'une structure saine. Cependant, ces techniques que l'on peut qualifier de globales (car elles ne font entrer en jeu que des grandeurs concernant l'ensemble de la structure) ne permettent pas de détecter des défauts dont la taille est petite devant la structure étudiée, car de tels défauts n'affectent que très peu le comportement modal de la pièce. De plus, même lorsqu'une légère modification du comportement modal est détectée, la localisation précise du défaut n'est pas toujours simple, ni très précise. Enfin, les méthodes par déformées modales nécessitent généralement une bonne connaissance des conditions aux limites de la pièce étudiée. Or, celles-ci sont souvent mal connues lorsque l'on s'intéresse à des structures complexes, ce qui limite l'applicabilité de ces techniques.

Pour pallier ce problème, un certain nombre de méthodes reposant sur une inversion des équations du mouvement sous leur forme variationnelle ont été développées. Cette approche permet la résolution de toute une variété de problèmes dépendamment des informations que l'on se donne a priori sur la pièce. Ainsi, certaines de ces méthodes ont été développées à l'origine pour caractériser et localiser les sources vibratoires excitant une structure. Dans le cadre du contrôle non destructif, elles sont utilisées pour effectuer une cartographie des paramètres matériaux. Une fois une telle cartographie calculée, il est possible d'identifier une perte locale de rigidité à un type de défaut (une inclusion, une délamination, ou une fissure par exemple). Curieusement, deux équipes de recherche ont développé cette idée de manière indépendante et similaire. Une équipe américaine au Naval Research Laboratory a exploité cette idée en formulant le principe variationnel en régime permanent selon les trois dimensions de l'espace pour obtenir une cartographie des coefficients de Lamé sur chaque élément de discrétisation de la pièce [42, 43]. Il est également démontré que lorsque le solide étudié peut être assimilé à une plaque mince, le calcul se simplifie [44]. Une étude expérimentale [45] illustre les possibilités de cette méthode dans le contexte du contrôle non destructif, dans

le cas d'une plaque raidie par des poutres. L'absence du cordon de soudure sur une portion de l'un des raidisseurs est détectée par cette méthode. Cette formulation a été étendue de manière à pouvoir inspecter des plaques orthotropes [46]. Dans ce cas, on obtient les cartes de trois indicateurs qui dépendent des modules d'élasticité E_x , E_y et G_{xy} de la plaque, ainsi que des modules de Poisson ν_{xy} et ν_{yx} . Cette méthode est validée numériquement sur une plaque de bois dans laquelle une inclusion est détectée. Une autre équipe de recherche a adopté une méthode similaire dérivée de la méthode des champs virtuels (*Virtual Fields Method* en anglais), qui exploite l'émergence de méthodes optiques permettant la mesure complète des champs de déplacement statiques ou dynamiques avec une bonne résolution [47–50]. Elle a au départ été proposée pour extraire la répartition de contraintes d'échantillons testés en traction [51], puis pour estimer les modules d'élasticité [52] d'amortissement de structures. La méthode des champs virtuels a plus récemment été adaptée pour calculer les forces d'excitation agissant sur une plaque à partir de la mesure de son champ vibratoire. Le premier travail sur ce sujet se concentre sur l'identification de forces en régime harmonique [53], et a été adapté pour pouvoir étudier le régime transitoire [54]. Un élément important dans les méthodes variationnelles est l'influence importante du choix du champ de déplacement virtuel utilisé dans l'intégration sur le résultat. Pour justifier cela, Berry *et al.* invoquent un "effet de moyennage" causé par l'intégration sur les sous-domaines de la pièce. En réalité, le processus d'identification de sources est un problème inverse régularisé par l'intégration des équations du mouvement. Cependant, aucune indication concernant la dépendance de ce filtrage à la qualité de la mesure n'est donnée dans la littérature, ce qui constitue une limite importante à la généralisation de cette méthode.

2.2.2 Méthode locale

La méthode RIFF – résolution inverse filtrée fenêtrée (en anglais FAT pour *Force Analysis Technique*) – est une autre méthode inverse basée sur les équations du mouvement. Pour le cas des plaques, celle-ci est :

$$\frac{E(1+i\eta)h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \rho h \omega^2 w = f(x, y, \omega) \quad (2.28)$$

où η est le facteur d'amortissement du matériau, w est le déplacement transverse, E est le module de Young, ρ est la masse volumique, ν est le module de Poisson, et h est l'épaisseur de la plaque. Cette équation est discrétisée : les données w sont mesurées sur un réseau de points, et les dérivées partielles sont approximées par des schémas aux différences finies. Une fois cette opération effectuée, le déplacement et ses dérivées sont injectées à gauche de l'équation (2.28), ce qui permet de connaître le chargement surfacique f . Cette méthode a d'abord été

développée pour étudier des poutres [55], puis adaptée aux plaques et aux coques [56, 57]. Une formulation similaire a été développée pour permettre de traiter des structures de forme arbitraire à l'aide d'une discrétisation en éléments finis [58, 59]. Cette approche permet non seulement l'identification d'efforts ponctuels, mais aussi répartis, comme dans le cas d'une excitation causée par une couche limite turbulente [60]. De plus, tout comme les deux autres approches présentées, la méthode RIFF est locale, au sens où elle peut être appliquée sur une zone limitée de la structure sans nécessiter de connaître le comportement en dehors de cette zone. En particulier, cela permet de ne pas tenir compte des conditions aux limites du problème qui sont souvent mal connues lorsque l'on s'intéresse à un système complexe.

En comparaison aux autres méthodes présentées, la méthode RIFF est plus instable, car elle repose sur une formulation non intégrée des équations du mouvement. Elle nécessite donc d'appliquer une régularisation sur le résidu obtenu. La contrepartie est qu'elle ne nécessite pas de choisir un champ virtuel dont la forme peut influencer significativement le résultat d'une manière difficile à prévoir. Pour mener la régularisation, la méthode initialement proposée, qui consiste à effectuer un fenêtrage puis à appliquer un filtre passe-bas sur le résidu a été peu à peu remplacée par des techniques plus standard, comme la régularisation de Tikhonov. Cette méthode peut également être utilisée pour l'identification inverse des paramètres d'un matériau, notamment son module de Young et son facteur d'amortissement [61, 62]. En plus de cette application, il est possible d'identifier des défauts en utilisant l'approche RIFF. Dans les travaux de Xu *et al.* [63, 64], cette méthode est utilisée pour détecter des défauts sur des poutres et des plaques soumises à une excitation harmonique. Ici aussi, il est supposé qu'un défaut dans la structure perturbe localement l'équilibre, ce qui génère un résidu non nul à un emplacement où l'on sait qu'aucune force n'est appliquée.

L'idée de coupler une méthode d'inversion du champ vibratoire et l'holographie acoustique a rarement été explorée dans la littérature. Pézerat *et al.* ont mené une étude expérimentale sur l'utilisation de la méthode RIFF se basant sur des mesures obtenues par holographie acoustique [65]. Il en ressort que la reconstruction à partir de simple microphones est possible à condition de mesurer la pression très proche de la source (à 1 cm). Ces travaux sur l'identification inverse d'efforts nous indiquent que l'identification de défauts à l'aide de simples microphones est soumise à une forte contrainte sur la distance entre le plan de mesure et la structure à étudier. D'autre part, une étude de Wu et Zhou [66] a exploré la possibilité théorique de retrouver l'excitation à laquelle est soumise une plaque rectangulaire simplement supportée en se basant uniquement sur la mesure de la pression dans son champ proche. Cette étude consiste à reconstruire la vitesse normale de la plaque en utilisant l'holographie

acoustique, et à utiliser ce champ de vitesse pour identifier l'excitation. Il est démontré que ce processus d'identification est bijectif. En d'autres termes, si l'on suppose que l'acquisition du champ de pression est parfaite et que les calculs se font sans erreur, la force d'excitation peut être reconstruite de manière unique. Par extension, la démonstration de la réciprocité de la relation vibro-acoustique nous assure par ailleurs que si un défaut est présent dans la plaque, le champ de pression porte obligatoirement la trace de sa présence, et qu'il est théoriquement toujours possible de remonter à sa position. Malgré l'élégance de ce résultat, le raisonnement et les simulations numériques présentées par Wu et Zhou ne prennent pas en compte le fait qu'il s'agit de coupler deux problèmes inverses, et que la solution obtenue dépend de manière critique de la qualité de la mesure.

2.2.3 Identification par inférence Bayésienne

Pour régulariser la méthode RIFF, nous avons vu que plusieurs stratégies sont possibles. Certaines d'entre elles sont analogues à celles présentées pour la NAH : le filtrage ad-hoc [56], ou la régularisation Tikhonov [59], par exemple. Il existe une autre approche récemment proposée par Zhang *et al.* [67] qui s'appuie sur un formalisme Bayésien analogue à celui présenté dans la partie 2.1.3.3.3. Ce formalisme permet non seulement d'estimer la solution comme dans la méthode RIFF classique, mais aussi d'obtenir une estimation du niveau de bruit ainsi que les intervalles de crédibilité associés à l'estimation de toutes les grandeurs aléatoires, en particulier du résidu lui-même. Faure *et al.* proposent une approche similaire [68] qui, grâce à la décomposition en valeurs singulières, permet d'implémenter cette méthode de manière encore plus efficace dans le cas d'une poutre soumise à une excitation harmonique. Des développements récents permettent de plus d'améliorer la régularisation pour prendre en compte des distributions à priori locales, et plus ou moins parcimonieuses [69, 70]. Une formulation adaptée pour l'identification dans le domaine temporel a également été donnée par Li et Lu [71]. En considérant toutes les variables d'intérêt comme aléatoires, un algorithme de Monte-Carlo par chaînes de Markov (plus précisément, l'échantillonneur de Gibbs) est utilisé pour échantillonner la densité de probabilité jointe de toutes ces variables. Cette approche très puissante permettrait de mesurer l'incertitude sur la détection de défauts causée par biais introduit par la reconstruction holographique.

2.3 Bilan de la revue de littérature

Par une étude de la physique du problème posé, nous avons mis en avant que le champ proche d'une source vibratoire regorge d'informations sur la nature de cette source. Il semble donc raisonnable de vouloir calculer les grandeurs acoustiques jusqu'à la surface de la plaque

étudiée. En particulier, l'estimation de la vitesse vibratoire de source pourrait être utilisée par une méthode inverse de détection de défaut. L'examen de la littérature nous a permis d'identifier l'holographie acoustique transitoire en champ proche comme la technique d'imagerie acoustique la plus adaptée pour obtenir ce champ de vitesse normale. Plus particulièrement, il semble que le formalisme temps-espace soit l'implémentation qui permette une reconstruction optimale, grâce à l'absence de fuite spectrale et à la déconvolution linéaire qui est effectuée dans cette méthode. Or, ce formalisme n'a à ce jour jamais été utilisé pour reconstituer la vitesse normale : nos efforts se concentreront donc sur l'adaptation de ce formalisme à notre situation.

D'autre part, nous avons vu que le champ vibratoire d'une plaque peut être utilisé pour remonter à des défauts dans la structure. Il existe pour cela plusieurs approches. La piste la plus prometteuse semble être celle de la méthode RIFF (et tous les développements qui en découlent), car elle permet de prendre en compte l'imprécision des données d'entrées via une régularisation. En effet le caractère mal posé du problème d'imagerie acoustique empêche une reconstruction parfaite du champ vibratoire de la source, à cause de l'étape nécessaire de régularisation. Pour le moment, la méthode RIFF n'existe pas en régime transitoire. Pour pouvoir coupler la NAH transitoire avec la méthode RIFF, une adaptation est donc nécessaire. Le formalisme actuel ne s'intéresse de plus qu'aux matériaux homogènes isotropes. Il semble qu'une extension de ce formalisme aux matériaux stratifiés soit possible sans trop modifier la technique.

Enfin, étant donné que le résidu de force est calculé à partir d'un champ vibratoire imparfait, il paraît nécessaire d'avoir une interprétation nuancée du résultat avant de conclure à la présence ou à l'absence de défaut. Il sera intéressant d'appliquer la méthode d'inférence Bayésienne proposée récemment pour obtenir des intervalles de crédibilité permettant de mieux qualifier le résultat.

CHAPITRE 3 APPROCHE PROPOSÉE ET ASPECTS MÉTHODOLOGIQUES

3.1 Problème de recherche identifié

D'après ce que nous avons vu dans la revue de littérature, nous savons que la présence d'un défaut dans une structure plane se retrouve dans le champ acoustique rayonné par cette structure lorsqu'elle est soumise à une excitation vibratoire. Or, les composantes dûes à une perturbation peuvent être évanescentes, et dans ce cas, elles sont détruites au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la source. L'holographie acoustique permet de reconstituer ces composantes, mais suivant la qualité de la mesure et la distance de rétro-propagation, cette reconstruction peut être plus ou moins précise. Cela peut poser un problème, car les méthodes permettant de détecter des défauts à partir de la connaissance du champ de vitesse d'une pièce sont toutes dépendantes de la précision de la mesure du jeu de données d'entrée. La problématique scientifique qui sous-tend ce mémoire est donc la suivante : est-il possible de remonter aux caractéristiques du défaut (sa localisation, sa forme, son type ou sa sévérité) à partir de mesures du champ de pression dans le champ proche de la structure inspectée ?

3.2 Objectifs et hypothèses de la maîtrise

3.2.1 Objectif général

L'objectif général des travaux présentés dans ce mémoire est de développer une méthode permettant la détection de défauts sur des plaques à partir de mesures de pression prises dans le champ proche de la structure. L'approche choisie étant relativement prospective, l'ambition de ce mémoire n'est pas d'offrir une solution parfaitement aboutie et directement applicable dans l'industrie, mais de proposer une preuve de concept, en posant les bases d'une méthode qui pourra être développée ou complexifiée dans de futurs travaux de recherche.

3.2.2 Objectifs spécifiques

Au regard des capacités offertes par les méthodes existantes dans le domaine du contrôle non-destructif, certains objectifs spécifiques ont été formulés pour développer une approche fiable et complémentaire à l'état de l'art :

1. La méthode développée devra permettre de localiser les défauts, d'évaluer leur taille, leur forme, et de quantifier leur sévérité.

2. La technique proposée devra exploiter des données obtenues sur une large bande de fréquences. Cet aspect multi-fréquentiel évitera que les effets de résonance de la pièce à inspecter ne compromettent la qualité de l'inspection.
3. La méthode devra être choisie de manière à maximiser le rapport signal sur bruit pour que la présence ou l'absence de défaut soit la moins ambiguë possible.
4. L'algorithme de traitement des données devra faire intervenir le moins possible l'utilisateur de manière à écarter au maximum les erreurs humaines.
5. L'approche proposée devra avoir une interprétation simple, de manière à avoir une bonne vision de la physique derrière la méthode proposée.
6. La technique devra être à la fois utilisable sur des matériaux homogènes et isotropes, mais aussi sur les matériaux multi-couches.
7. Il devra être possible d'estimer la confiance accordée au résultat de l'algorithme de détection de défauts.

3.2.3 Hypothèses de recherche

Pour atteindre l'objectif général de cette maîtrise, il a été nécessaire de poser certaines hypothèses afin d'appuyer notre recherche. Premièrement, on suppose une géométrie particulière : celle-ci doit être assimilée à une plaque plane, dont les dimensions sont supposées connues. Le ou les matériaux constitutifs de la plaque sont aussi supposés connus. En particulier, on suppose que la matrice de rigidité de la plaque, ainsi que sa masse volumique sont connus par l'utilisateur.

On suppose également que l'antenne de microphones servant à échantillonner le champ de pression est plane. Pour limiter les problèmes de troncature lors de l'étape de rétro-propagation, il est également nécessaire que l'antenne soit plus grande que la source à étudier. Enfin, la configuration de l'antenne doit être telle que le champ de pression est connu sur un maillage carré (ou rectangulaire) : l'espacement des microphones doit être régulier, et les deux directions principales doivent être orthogonales. Nous supposons ici que la géométrie de l'antenne est précise, de manière à négliger toute erreur de placement des microphones. De plus, les microphones sont calibrés avant chaque expérience. L'acquisition temporelle doit elle aussi se faire en utilisant un pas de temps constant. Ces hypothèses permettent le développement d'une méthode efficace sur des jeux de données de taille réaliste grâce à l'utilisation de la transformée de Fourier discrète. Typiquement, les jeux de données utilisés dans la suite de ce mémoire comportent quelques dizaines d'échantillons dans chaque direction de l'espace, et quelques centaines d'échantillons temporels : l'antenne utilisée dans la partie

expérimentale de mémoire comporte 64×92 positions de microphones pour 1000 échantillons temporels, ce qui représente un jeu de données d'environ 5,9 millions de valeurs. La matrice de transfert \mathbf{G} serait donc difficile à construire car elle comporte $(5,9 \times 2)^2$ éléments. De plus, son inversion serait imprécise à cause de son conditionnement : pour l'antenne utilisée dans la partie expérimentale, le conditionnement de cette matrice est de l'ordre de 10^{16} pour une distance de rétro-propagations de 4,5 cm.

3.3 Méthodologie

La formulation temps-espace (TSD-NAH) est tout d'abord adaptée à la reconstruction de la vitesse normale. Pour cela, la fonction de Green reliant la vitesse de la source à la pression sur le plan de mesure est échantillonnée dans le domaine temps-espace, de manière à éviter les problèmes de recouvrement et de fuite spectrale. L'opérateur de convolution est incorporé dans un opérateur circulant (donc diagonalisable diagonalisable) pour garantir une implémentation efficace. Grâce à l'étape de zero-padding, une déconvolution linéaire est appliquée entre le champ de pression mesuré par l'antenne de microphones et la fonction de Green pour retrouver la vitesse de la source. Pour régulariser la déconvolution, la stratégie de régularisation adoptée est la régularisation de Tikhonov, car elle est très simple à implémenter, et car il existe un panel de méthodes permettant de sélectionner automatiquement le paramètre de régularisation optimal.

La pertinence de cette méthode est évaluée sur deux cas numériques. Le premier cas sert à mettre en évidence les avantages du formalisme TSD-NAH et comparer ses performances par rapport aux autres méthodes de l'état de l'art (RT-NAH et TD-NAH). La seconde étude numérique est menée sur une plaque simplement supportée, et vise à donner les ordres de grandeur des erreurs numériques causées par la troncature du champ mesuré et le filtre de régularisation. L'applicabilité pratique de cette technique est validée sur un jeu de données expérimentales : une plaque en plexiglass soumise à un impact causé par une tige métallique est installée sur un banc d'essai approprié dans une chambre anéchoïque, et la vitesse de la plaque au cours du temps est reconstituée. Il est également montré que le champ de vitesse reconstitué contient des informations sur la plaque étudiée (notamment sur son module de rigidité).

La méthode RIFF est ensuite adaptée à l'étude de signaux transitoires. L'extension proposée consiste à remplacer le noyau de convolution bi-dimensionnel de la méthode RIFF stationnaire par un noyau de convolution tri-dimensionnel permettant de prendre en compte

la discrétisation des équations du mouvement dans la dimension du temps. Pour assurer une implémentation efficace, la même opération de circularisation que pour la NAH est appliquée, ce qui permet d’exploiter l’efficacité de l’algorithme FFT. Ce problème inverse est également stabilisé grâce à la régularisation de Tikhonov, qui doit être appliquée après une opération de fenêtrage permettant de supprimer les effets de bords survenant aux frontières de la fenêtre de mesure. La technique proposée est validée dans le cas d’une plaque de plexiglass soumise à un impact dont le champ vibratoire est mesuré par vibrométrie laser. La force d’excitation identifiée par méthode RIFF transitoire est comparée au signal de force mesuré par le marteau d’impact excitant la plaque, et il est montré qu’une masse ajoutée perturbant les équilibres d’équilibre de la plaque peut être identifiée comme une force virtuelle.

Un chapitre complémentaire à l’article sur la méthode RIFF est présenté pour généraliser cette méthode à l’étude des matériaux stratifiés. Pour cela, le noyau de convolution est complété par huit éléments supplémentaires, ce qui permet de prendre en compte tous les éléments de la matrice ABD du matériau (supposé connu). Ce type de noyau permet entre autres de prendre en compte des matériaux composites fortement anisotropes. Une validation numérique est présentée pour montrer les possibilités théoriques de cette technique pour la détection de défauts : une masse ajoutée et une zone comportant des fibres mal alignées sont détectées sur une plaque de fibre de carbone. La validation expérimentale permet de sonder les aspects pratiques de la méthode RIFF transitoire. Deux plaques en fibre de carbone sont fabriquées : la première comporte une masse ajoutée, et la seconde contient des inclusions visco-élastiques. Ces études permettent de souligner les limites de la sensibilité de la technique proposée.

Un chapitre sur l’utilisation de la méthode RIFF avec des données mesurées par TSD-NAH conclut le corps de ce mémoire. Une méthode proposée par Faure *et al.* [68] est adaptée à la méthode RIFF transitoire pour tirer un maximum d’informations de la mesure. Cette méthode Bayésienne consiste à inférer toutes les variables d’intérêt, considérées comme aléatoires. Elle permet notamment d’obtenir les intervalles de crédibilité dans lesquels se situent les variables d’intérêt, comme le résidu de la méthode RIFF transitoire. Ces intervalles sont interprétés pour obtenir un indice de fiabilité associé à chaque résultat. L’implémentation détaillée de l’algorithme de Monte-Carlo utilisé pour tirer des échantillons de ces variables aléatoires est présentée, et la portée de cette technique est illustrée sur des jeux de données expérimentales. La vitesse d’une plaque de plexiglass comportant une inclusion est mesurée par vibrométrie laser, ce qui permet de reconstituer le champ de pression sur un plan situé à une distance arbitraire de la source. Pour finir, l’influence de la distance de rétro-propagation

sur l'indice de fiabilité de détection est discutée.

CHAPITRE 4 ARTICLE 1 : TIME–SPACE DOMAIN NEARFIELD ACOUSTICAL HOLOGRAPHY FOR VISUALIZING NORMAL VELOCITY OF SOURCES

4.1 Préface

Les auteurs de cet article sont Nicolas Aujogue, Annie Ross et Jean-Michel Attendu. Il a été soumis le 2 juin 2019 dans la revue *Mechanical Systems and Signal Processing*, et a été accepté avec révisions majeures.

Cet article présente la méthode développée pour reconstruire la vitesse sur la plaque à étudier. Elle s'inscrit dans la prolongation de la méthode TSD-NAH développée initialement pour calculer des hologrammes de pression. Dans le corps de l'article, deux études numériques sont menées pour démontrer que l'utilisation du formalisme TSD permet une réduction d'erreur significative par rapport aux autres méthodes de l'état de l'art, et pour quantifier les erreurs de reconstruction introduites lors de la rétro-propagation. Enfin, cette méthode est appliquée sur un cas réel pour prouver l'applicabilité de la méthode sur des jeux de données réalistes.

Ce chapitre permet de répondre aux objectifs spécifiques (2), (4) et (6). En effet, le formalisme TSD est parfaitement adapté pour reconstruire des signaux transitoires, ce qui permet d'obtenir des informations sur une large plage fréquentielle. Cette méthode est de plus utilisée avec une stratégie de régularisation simple qui ne fait pas intervenir l'utilisateur. Enfin, la technique proposée est parfaitement compatible avec tous les types de matériaux.

4.2 Abstract

In this paper, the time–space domain Green's function relating the sound pressure to the normal velocity of particles is used to adapt time–space domain nearfield acoustical holography (TSD-NAH) to recover the transient normal velocity of a planar source from acoustic measurements. This method provides a simple and effective visualization of the time-evolving vibration field of plate-like structures. Numerical results on a baffled membrane model show that this method avoids some of the signal processing errors introduced by other state-of-the-art methods. A case study on a baffled plate shows that the velocity reconstruction remains satisfactory (with less than 20% error) for back-propagation distances up to 10 cm and typical signal-to-noise ratios (≥ 20 dB). Finally, TSD-NAH is applied on an experimental set of data obtained from a plexiglass plate impacted with a steel rod; the computed velocity field is visualized in time and space domains. It is then showed that the computed velocity field

can be used to recover unknown properties of the source. In particular, the Young's modulus of the tested plate has been estimated with a precision better than 5%.

4.3 Introduction

Analyzing acoustic radiation of vibrating objects has multiple technical applications in industry, such as noise source identification, non-destructive testing, or active noise control. Transient sounds generated by impacts on plate-like structures have been widely studied [72–75] since they occur in common industrial processes, such as riveting or forging, and can cause hearing impairment among noise-exposed workers. Visualizing acoustic quantities not only in the farfield, but also in the nearfield and on the surface of a source can give engineers a better understanding of the phenomena associated with transient radiation and vibration. This approach can yield useful indications on the structural modifications required to reduce vibration transmission and noise emission, or to enhance the subjective characteristics of the sound [76,77]. Vibration fields due to transient excitations can be measured using a wide array of accelerometers, but this method may modify the behavior of the system because of the mass loading of the structure. For contactless measurements, more sophisticated optical methods have been developed such as holographic interferometry [48], digital image correlation [50], or laser doppler vibrometry [78]. However, these techniques are expensive and often require tedious and complex setups such as special surface conditioning to adjust the light scattering properties of a structure under investigation.

To overcome these limitations, a variety of methods have been developed to address the issue of reconstructing the normal velocity of a source from acoustic measurements performed with simple microphones. Among various techniques, the boundary elements method [12] allows reconstructing acoustic sources by inverting the transfer matrix relating the radiated pressure at any field point to the normal component of the surface velocity. The equivalent sources method [79,80] is an alternative that requires less computational time. It relies on the replacement of the original source with a finite number of virtual elementary sources, usually multipoles. However, to this day, no consensus has been reached to choose the optimal locations and number of virtual sources [81]. Nearfield acoustical holography (NAH) based on the Fourier transform approach is another category of methods which are particularly suited when the geometry of the reconstruction surface is simple (*i.e.* planar, cylindrical, or spherical). This method was first presented by Maynard and Williams [14], and allows three-dimensional reconstruction of a sound field from the sound pressure sampled using a microphone array placed in the nearfield of the acoustic source. The original formulation

is suited for stationary signals only, but has also been adapted to process non-stationary signals [27]. In order to reduce time-aliasing errors, Blais and Ross proposed another formulation using a numerical Laplace transform instead of a time domain Fourier transform, and applied this technique to recover the transverse velocity of an impacted plate [30]. Thomas *et al.* developed Real-Time Nearfield acoustical holography [31, 32] (RT-NAH) which uses a Green's function sampled in the time-wavenumber domain to continuously compute pressure fields. This method was adapted by Zhang *et al.* to recover the source's normal velocity [33]. Recently, the time-space domain (TSD) formulation based on a linear convolution between the measured pressure field and a Green's function sampled in the time-space domain was proposed for computing pressure holograms. A three-dimensional linear deconvolution algorithm was presented and tested on a numerical example, showing that TSD method outperforms other state-of-art methods [36].

Based on these promising advances, the purpose of this article is to develop a similar time-space domain formalism to recover the normal velocity of a source. Such information can be directly used to visualize the transient behaviour of a plate-like structure, or post-processed to compute other physical quantities. Knowing the full velocity field in time domain, one can for example achieve non destructive testing by tracking reflections of the wave fronts on cracks or inclusions inside the plate. In section 4.4, theoretical aspects of the method are explained. The proposed technique is then applied on two different datasets in section 4.5. First, a simple numerical model of a radiating membrane is used to highlight the benefits of using a time-space domain formalism. The benefits of the suppression of spectral leakage and wrap-around are demonstrated. Then, a realistic case study is considered : reconstruction of the velocity field of a rectangular plate is investigated in order to assess the errors made by the proposed method. Finally, in section 4.6, the normal velocity of an actual impacted plate is recovered using an experimental setup to demonstrate the applicability of the proposed method.

4.4 Theoretical development

In this section, the theory behind pressure-to-velocity NAH is presented. The expression of the Green's function and a practical implementation scheme are given.

4.4.1 Analytical formulation

This study assumes a planar configuration (see figure 4.1). An array of microphones is placed on the measurement plane, located at $z = z_m$, and the microphones are spaced with a

constant step in each direction on this plane. With this setup, the pressure field $p(x, y, z_m, t)$ is sampled and the normal component of the particle velocity v_z can be calculated on any plane between the measurement plane and the source. In particular, it is possible to recover the normal velocity of the source $v_z(x, y, 0, t)$.

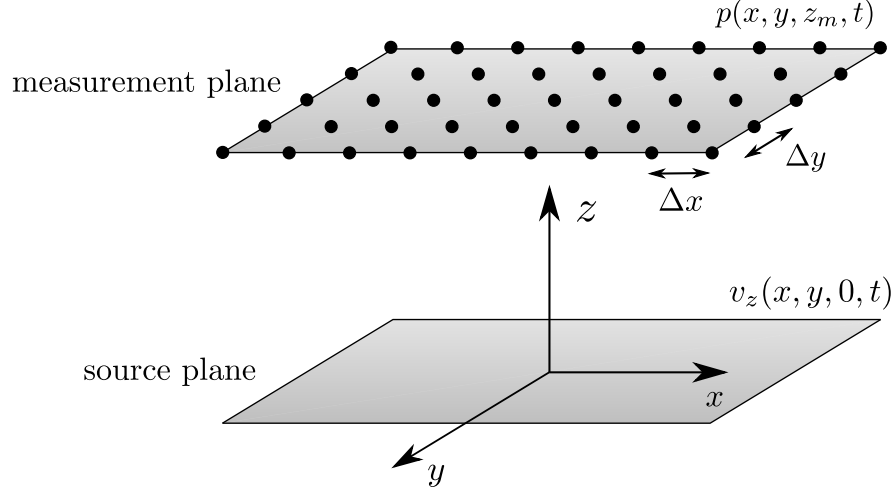


Figure 4.1 Geometry of planar nearfield acoustical holography. Black dots illustrate microphone positions.

Rayleigh's integral relates the pressure on a measurement plane $z = z_m$ to the velocity on any parallel reconstruction plane $z = z_r < z_m$ [13]. This relation can be expressed by a convolution :

$$p(x, y, z_m, t) = \frac{\rho}{2\pi} \iint \frac{\frac{\partial v_z}{\partial t}(x', y', z_r, t - R/c)}{R} dx' dy', \quad (4.1)$$

$$= \iiint v_z(x', y', z_r, t') \cdot g(x - x', y - y', d, t - t') dx' dy' dt', \quad (4.2)$$

where $d = z_m - z_r$ is the distance between the measurement and the reconstruction plane, $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + d^2}$ is the distance from the measured point (x, y, z_m) to the source point (x', y', z_r) , and $g(x, y, d, t)$ is the velocity-pressure Green's function. Its expression in the time-space domain is given by :

$$g(x, y, d, t) = \frac{\rho}{2\pi R} \frac{\partial}{\partial t} \delta(t - \frac{R}{c}), \quad (4.3)$$

where δ denotes the Dirac delta function, ρ is the density of air, and c is the speed of sound. Time integration appears in equation (4.2) in order to take into account the time delay R/c that is included in the Green's function expressed in equation (4.3). Knowing the pressure on

a measurement plane $z = z_m$, it is therefore possible to compute the normal velocity of the source plane $z = 0$ or at any given position between the two planes. However, recovering the velocity from the measured pressure field is an ill-posed problem [82], as discussed below.

4.4.2 Backward propagation problem

In this subsection, we present the formalism for backward propagation, and a standard way to deal with the ill-posedness of the problem. An overview of the implementation is proposed, and the numerical errors introduced by this method are explained.

For the backward propagation problem, we assume a sampled pressure field $p(x, y, z_m, t)$, from which we want to compute the source normal velocity $v_z(x, y, 0, t)$. The sampled input data can be represented by a vector \mathbf{p} containing the values of the measurements for the corresponding position and time. Regularly spaced sampling is assumed in all directions, with spacings Δx , Δy , and Δt . The same sampling applies to \mathbf{v} , the discretized version of the output velocity, so that the reconstruction grid and the sampling grid (defined by the characteristics of the array) are identical. After discretization, the convolution performed in two space dimensions and time dimension is given in equation (4.2) becomes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{v}, \quad (4.4)$$

where $\mathbf{T}_{\mathbf{g}}$ is a block-Toeplitz matrix, and each of its blocks is a Toeplitz block-Toeplitz matrix. $\mathbf{T}_{\mathbf{g}}$ represents a linear convolution with \mathbf{g} , a discretized version of the Green's function g . The 3D convolution in the two space dimensions and in the time dimension are processed at once by matrix $\mathbf{T}_{\mathbf{g}}$. The elements of this matrix encapsulate the time delay corresponding to the propagation from the elementary sources to the microphone's positions, the $\frac{\rho}{2\pi R}$ scaling factor, and the discretized time derivative. When computing linear convolution, the resulting signal has more samples than the two convolved signals. Therefore, the total resulting pressure field has a larger span than the sampling window : \mathbf{p} corresponds to the part of the result located inside the sampling domain, while $\tilde{\mathbf{p}}$ corresponds to the truncated part of the pressure field. This matrix formulation is the corner stone of both direct and inverse problems. However, $\mathbf{T}_{\mathbf{g}}$ contains a large number of elements, which forbids its explicit building and inversion.

From a mathematical point of view, embedding the Toeplitz matrix $\mathbf{T}_{\mathbf{g}}$ into a bigger block-circulant matrix $\mathbf{C}_{\mathbf{g}}$ [36] allows simplifying the problem :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\mathbf{g}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

This circulant system is equivalent to equation (4.4), but matrix $\mathbf{C}_{\mathbf{g}}$ can easily be inverted using FFT. Indeed, since $\mathbf{C}_{\mathbf{g}}$ is block-circulant, it can be diagonalized using the 3D-DFT matrix [37], and its diagonal elements correspond to the 3D-Fourier transform of \mathbf{G} , the zero-padded version of \mathbf{g} . This allows computation of the normal velocity field by zero-padding \mathbf{p} and \mathbf{g} , getting their 3D-FFT, dividing the two and computing the inverse 3D-FFT to obtain the result of the deconvolution. However, deconvolution is an ill-posed problem. Hence, in order to limit the sensitivity of the result to measurement noise, an additional regularization step is required. It consists in finding the source field which minimizes Tikhonov's cost function [82] :

$$\widehat{\mathbf{V}} = \arg \min_{\mathbf{V}} \left(\|\mathbf{C}_{\mathbf{g}}\mathbf{V} - \mathbf{P}\|^2 + \lambda \|\mathbf{V}\|^2 \right), \quad (4.6)$$

where \mathbf{V} and \mathbf{P} stand for the zero-padded version of \mathbf{v} and \mathbf{p} , $\|\cdot\|$ denotes the ℓ_2 norm, and λ is a scalar regularization parameter. A circulant formulation of the problem allows one to express conveniently the solution of equation (4.6) with the Fourier transform of \mathbf{P} and \mathbf{G} :

$$\widehat{\mathbf{V}} = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{|\mathcal{F}(\mathbf{G})|^2}{|\mathcal{F}(\mathbf{G})|^2 + \lambda} \cdot \frac{\mathcal{F}(\mathbf{P})}{\mathcal{F}(\mathbf{G})} \right), \quad (4.7)$$

where \mathcal{F} and \mathcal{F}^{-1} stand for the three-dimensional Fourier transform and its inverse, respectively. From the latter expression of the solution, it appears that regularization consists in applying a low-pass Wiener filter on the naive solution $\mathcal{F}^{-1}(\frac{\mathcal{F}(\mathbf{P})}{\mathcal{F}(\mathbf{G})})$. The regularization parameter λ can be seen as the cut-off frequency of this filter and allows attenuating the contribution of the smaller values of $\mathcal{F}(\mathbf{G})$, since the amplitude of the filter tends towards zero when $|\mathcal{F}(\mathbf{G})|^2 \ll \lambda$. The smaller values of $\mathcal{F}(\mathbf{G})$ correspond to evanescent waves that are both easily altered by noise and amplified during back-propagation. Even at high signal-to-noise ratios (SNR), the use of regularization is mandatory to obtain meaningful result ; however, the Wiener filter affects the shape of the solution, that is, it also affects the amplitude of the desirable components that contribute to the solution. In practice, the regularization parameter can be optimized automatically using standard techniques such as the L-curve method [83], Generalized cross-validation [24], or a Bayesian empirical method [84], for example. Computations required to obtain the regularized solution are summarized in a block diagram in figure 4.2.

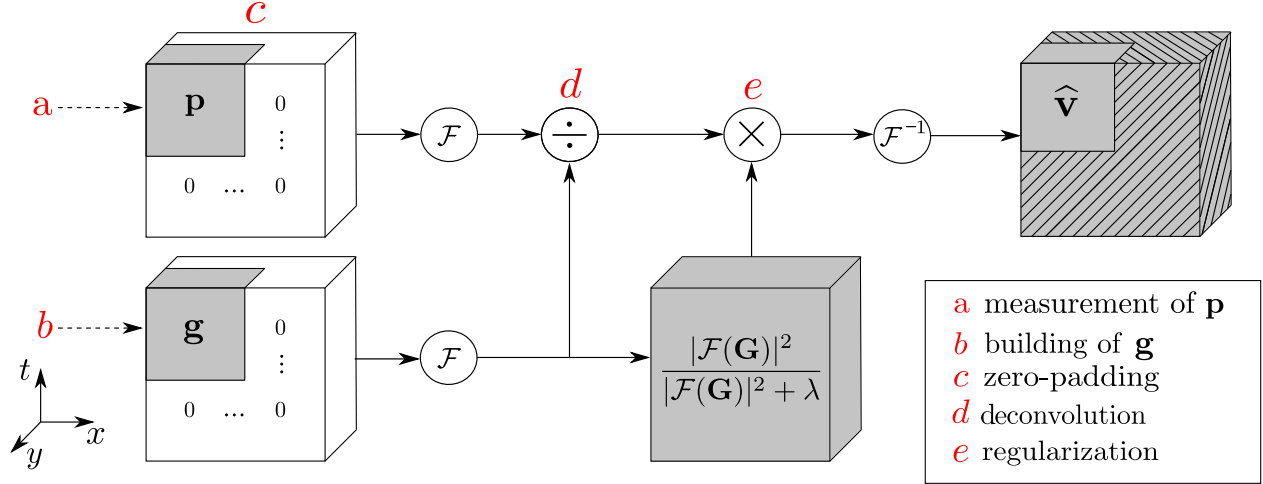


Figure 4.2 Diagram of the steps needed to compute the regularized solution $\hat{\mathbf{v}}$. The hatched area corresponds to samples of $\hat{\mathbf{V}}$ that are not relevant and must be left out.

It should be pointed out that the field computed from measured data contains two kinds of errors :

- Due to the regularization filter, the contribution of evanescent waves is reduced in order to avoid noise amplification. Hence some components are missing in the reconstructed field.
- The pressure measurement aperture is finite. It was proven that this generates inevitable truncation of the full field, both in time or spatial domain [36]. In the circulant formalism (4.5), this truncation corresponds to substituting $\tilde{\mathbf{p}}$ with the null values of the zero-padding.

However, as shown in the following section, using a time–space formulation allows avoiding other errors that occur when the Green’s function is sampled in the Fourier domain.

4.5 Numerical validation

This section validates the previous developments and assesses the precision of the proposed technique. A first case study on a simple membrane model is presented to show the advantages of using a time–space sampling of the Green’s function compared to other state of the art methods, namely time-domain NAH (TD-NAH) [27] and real-time NAH (RT-NAH) [33]. A second case study is presented on a realistic source to assess the quality of the reconstruction, and give insights about acceptable SNRs and back-propagation distances.

4.5.1 Case study : circular membrane

4.5.1.1 Computation of the pressure field radiated by a circular membrane

The method proposed by Kelly and McGough [85] is used to compute efficiently the pressure field caused by transient excitation of a membrane. A dataset is obtained on which TSD-NAH is applied. The reconstructed field is compared with the original velocity.

The membrane's velocity distribution is a circular Hann window of width r_p (the membrane's radius). Its time evolution is a damped sinus, which is an example of a transient signal having a broad spectral content. By denoting r the distance to the center of the membrane, the normal velocity field is given by :

$$v_z(r, t) = \begin{cases} A \cos(\frac{\pi}{2} \frac{r}{r_p})^2 \times \sin(2\pi f t) e^{-\gamma 2\pi f t}, & r \leq r_p \\ 0, & r > r_p \end{cases} \quad (4.8)$$

where f is the frequency, and γ is the damping coefficient. Their numerical values used for the simulation are presented in 4.7, along with the characteristics of the reconstruction grid (identical to the characteristics of the microphone array). The membrane is discretized into N rigid concentric rings, the individual contributions of rings are multiplied by a Hann window, and are finally summed. Ultimately, the total pressure field is a sum of contributions from rigid circular pistons, computed using Stepanishen's method [86].

4.5.1.2 Suppression of spectral leakage and periodization

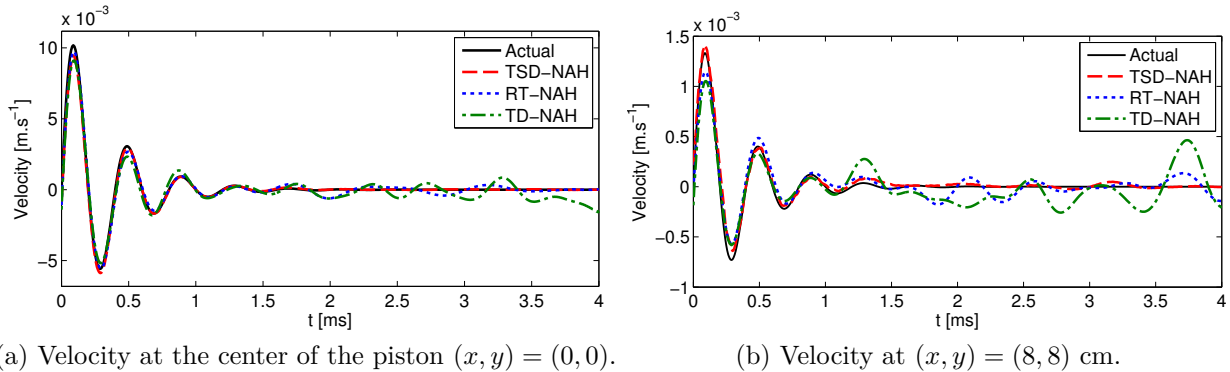


Figure 4.3 Normal velocity signals obtained by TSD-NAH, RT-NAH and TD-NAH, for $d = 5$ cm.

The pressure field from the piston is generated using the previously described method. The simulated measurement plane is at a distance $d = 5$ cm from the source, and a small amount of Gaussian noise (of SNR 30 dB) is added to pressure samples to simulate more realistic measurement. The velocity field obtained from TSD-NAH is then compared to the solution described in equation (4.8). In order to give clear insight in the advantage of using a time-space domain method, the solution is also compared to velocity fields obtained from two other methods :

- Time-Domain NAH (TD-NAH), which relies on a sampling of the Green's function in the Fourier domains :

$$g_{TD}(\omega, k_x, k_y) = \frac{\rho_0 \omega}{k_z} e^{ik_z d},$$

where k_z is the normal component of the wavenumber vector (k_x, k_y, k_z) , verifying $k_z^2 = (\frac{\omega}{c})^2 - k_x^2 - k_y^2$.

- Real-Time NAH (RT-NAH), which uses a hybrid Green's function sampled in time domain and spatial frequency domains :

$$g_{RT}(t, k_x, k_y) = \rho_0 c \delta(t - \frac{d}{c}) - \rho_0 c^2 t \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\sqrt{t^2 - (d/c)^2}} J_1(c \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \sqrt{t^2 - (d/c)^2}) H(t - \frac{d}{c}),$$

J_1 being the Bessel function of the first kind and of order one, δ being the Dirac function, and H being the Heaviside step function.

In order to get comparable results, the source picked for this numerical case is chosen so that the instability of the back-propagation is limited : the pressure field is mostly propagative (evanescent waves represent 23% of the energy of the source, while propagative components carry 77% of the energy), and the amount of noise injected in the input is small (but still achievable with a good setup). This way, the quality of the reconstruction is not critically affected by the amount of regularization, which allows using the same regularization parameter for all three methods while limiting the risk of over-regularizing (or under-regularizing) only one of them. Hence, errors due to spectral leakage and periodization are made clearly visible, since they do not interfere with the bias introduced by regularization.

In figure 4.3, time signals reconstructed at the center of the membrane $(x, y) = (0, 0)$ and at $(x, y) = (8, 8)$ cm are presented along with the actual velocity imposed with equation (4.8). Even if all three methods allow satisfactory reconstruction of the membrane's vibration between $t = 0$ and $t = 1$ ms, TSD-NAH outperforms other methods after the membrane has damped. The null values after $t = 1.5$ ms are not well approximated by RT-NAH and TD-

NAH. This is due to the fact that both methods sample the Green's function in the frequency domain, while the output signals are presented in time-space domain. Indeed, if the Green's function is sampled in the Fourier domains, severe truncation is made and leads to spectral leakage when inverse DFT is performed. It causes high frequency ripples on the Green's function, that are taken into account during deconvolution. These contributions add up to the deconvolved signal and lead to errors when the result of the convolution is presented in time-space domain (see figure 4.3 for $t \geq 1.5$ ms). The ripples of the Green's function caused by spectral leakage are visible in figure 4.4 on the second and third columns, which respectively give a time-space domain representation the Green's function used in RT-NAH and TD-NAH. This is more obvious on the third column, since this phenomenon exists in three dimensions in TD-NAH, while it only occurs in the two space dimensions in RT-NAH.

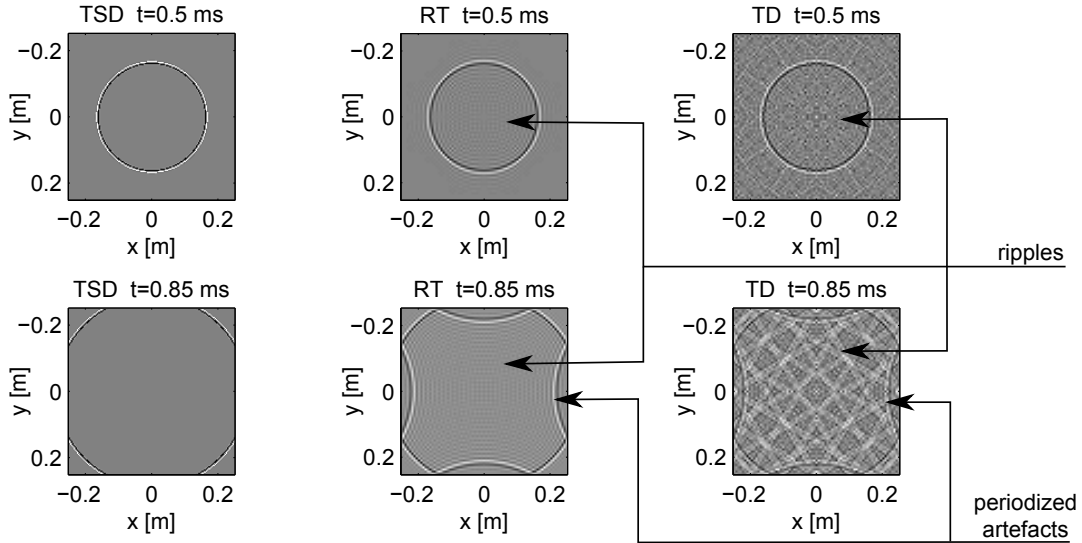


Figure 4.4 Time-space domain Green's function for $d = 5$ cm (in arbitrary units). First row is a snapshot at $t = 0.5$ ms, second row is at $t = 0.85$ ms. First columns is a t - x - y sampling (TSD-NAH), second column is a t - k_x - k_y sampling (RT-NAH), and third column is a ω - k_x - k_y sampling (TD-NAH).

In addition, sampling the Green's function in the frequency (or wavenumber) domain implies a periodization in the direct domain. Therefore, in RT and TD formalisms, the Green's function repeats periodically in space dimensions, and also repeats periodically in time dimension (in TD formalism only). On the second row of figure 4.4, the contribution of the periodized source is clearly visible on the edges of the domain of the Green's function. In figure 4.5, these undesirable components are visible on the reconstructed velocity fields computed with RT-NAH and TD-NAH on the side on the piston for $t = 0.3$ ms, and on the whole domain after

the piston has damped ($t = 2$ ms). When TSD-NAH is used, these artefacts are significantly reduced.

Both spectral leakage and periodization add components that should be ignored during deconvolution, and affect the back-propagated field. Thus, time-space sampling should be preferred to frequency-wavenumber and time-wavenumber sampling.

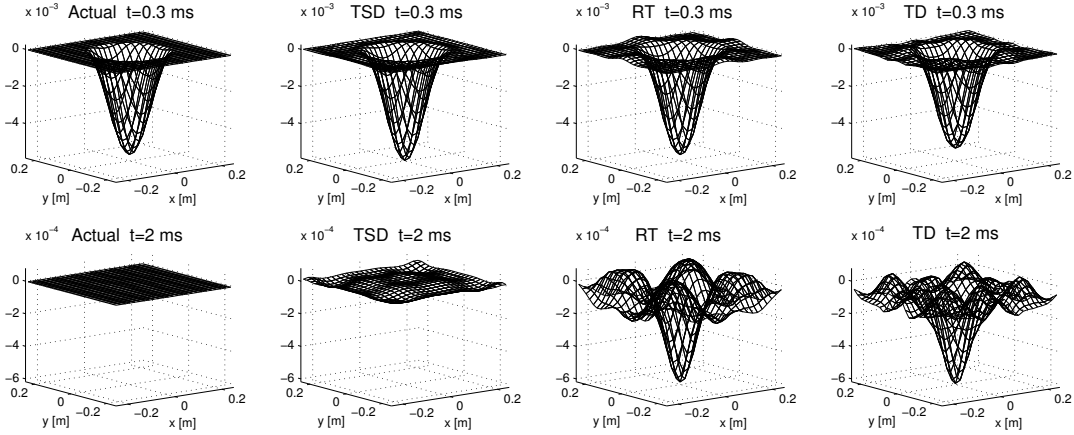


Figure 4.5 Comparison of the reconstructed velocity fields for $d = 5$ cm. First row is a snapshot at $t = 0.3$ ms, second row is at $t = 2$ ms. The first column is the actual velocity profile. The second, third and fourth columns are respectively fields computed with TSD-NAH, RT-NAH, and TD-NAH.

4.5.2 Case study : simply supported plate

4.5.2.1 Generation of the input data

In this subsection, a baffled aluminium plate of dimensions 50×30 cm and of thickness 1 cm is considered. It is subjected to an impact force (see figure 4.6a) at $(x, y) = (10, 5)$ cm from the center of the plate (see figure 4.6b). The plate is simply supported on its four edges : such boundary conditions allow analytical computation of the modes and eigen frequencies, which simplify synthesis of the plate's vibrations by modal superposition. For this simulation, 50 modes were taken into account. The parameters used for the computation of the velocity field are gathered in 4.7. Once the velocity field is known, the pressure field can be obtained on any plane parallel to the source, by directly computing Rayleigh's integral (4.1). This field is taken on a measurement window of size 91×63 cm. In order to model measurements errors independently from the back-propagation distance, a Gaussian noise is added after computation of the pressure, and the SNR is adjusted to 10 dB (poor conditions), 20 dB

(intermediate conditions), or 30 dB (laboratory conditions).

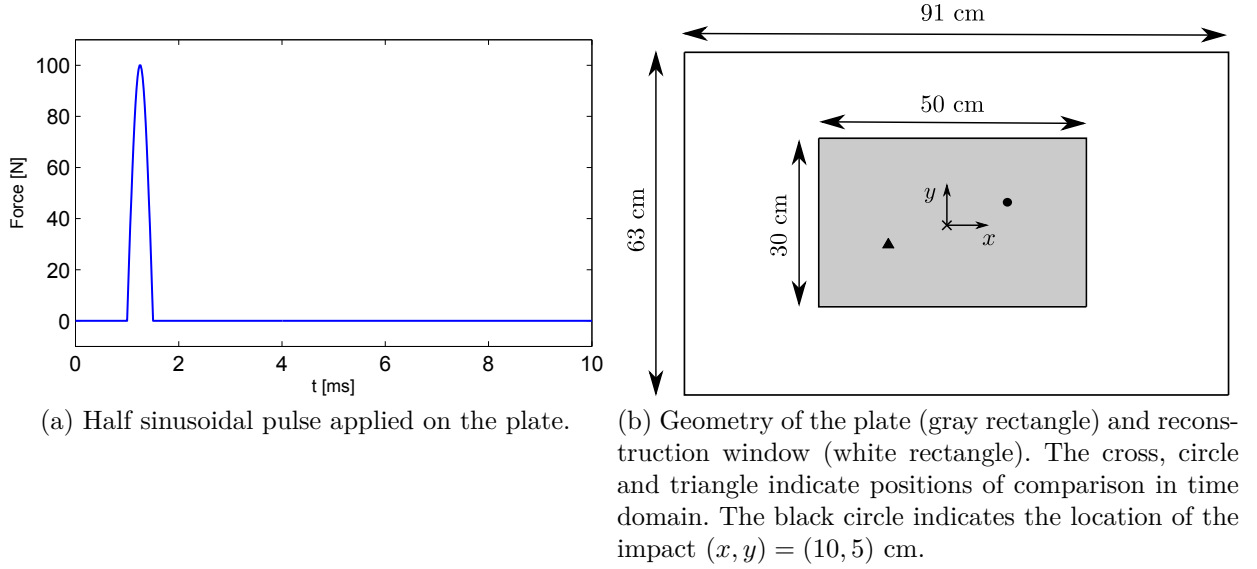


Figure 4.6 Excitation of the plate under study.

The pressure field generated by this plate contains important contributions of evanescent waves (53% of the total energy of the source). The level of errors obtained in the following subsection only apply to the present case study. However, this example gives useful insights on the order of magnitude of the errors expected on other cases, provided the evanescent contributions are of similar importance. More generally, sources with lower evanescent content should be reconstructed with smaller rates of errors than presented on this study, whereas for sources with higher evanescent content, back-propagation should be less precise.

4.5.2.2 Error analysis

The source velocity field is reconstructed from pressure fields obtained from the previously described method. The Generalized Cross-Validation method was applied for choosing the values for the regularization parameter λ . Computations are performed for back-propagation distances from 1 cm up to 15 cm. Two metrics are used to assess the quality of the method :

$$\varphi = \frac{|\mathbf{v}^T \mathbf{v}_{\text{ref}}|}{\sqrt{(\mathbf{v}^T \mathbf{v})(\mathbf{v}_{\text{ref}}^T \mathbf{v}_{\text{ref}})}} \quad (4.9)$$

$$M = \frac{|\sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} - \sqrt{\mathbf{v}_{\text{ref}}^T \mathbf{v}_{\text{ref}}}|}{\sqrt{\mathbf{v}_{\text{ref}}^T \mathbf{v}_{\text{ref}}}} \quad (4.10)$$

where \mathbf{v} is the reconstructed velocity, and \mathbf{v}_{ref} is the actual solution. φ indicates the phase similarity of the signals (it should be close to 1 for a good match), and M denotes the relative magnitude difference of the signals (it should be close to 0 for a good reconstruction). These indicators are computed on each point of the plate, and their mean values are indicated in figure 4.7a for each back-propagation distance. Considering both M and φ , the accuracy of the reconstruction decreases significantly with greater back-propagation distance and lower SNR, since the problem becomes more unstable and the contribution of evanescent waves is masked by the measurement noise. A simple indicator of the instability of the problem is the condition number of \mathbf{C}_g , which is equal to the ratio between the larger and the smaller value of $\mathcal{F}(\mathbf{G})$. This number strongly depends on the maximal value of the ratio d/k_z , which is proportional to $d/\Delta x$. Therefore, in figure 4.7, for more generality, the back-propagation distance is scaled using the spatial increment $\Delta x = \Delta y = 1$ cm.

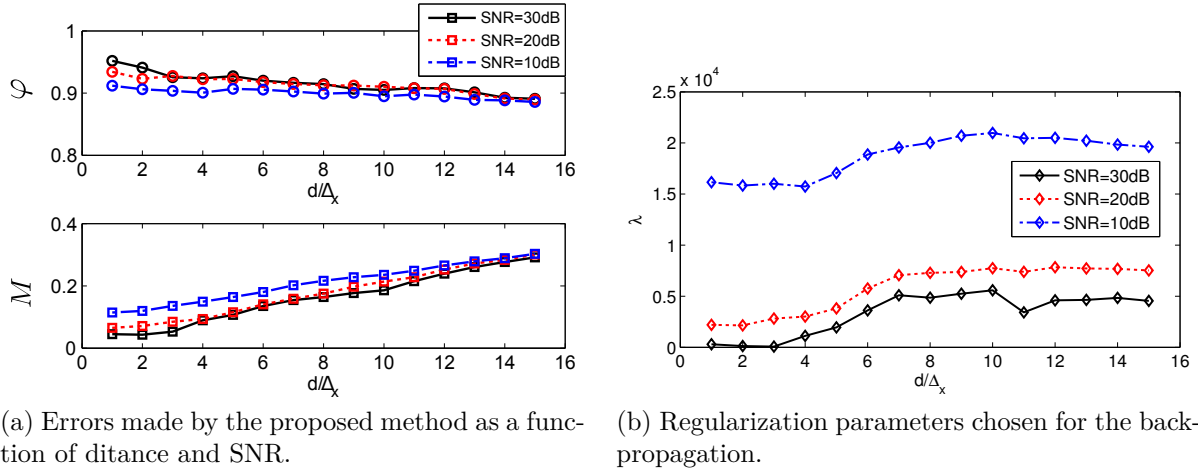


Figure 4.7 Values of errors obtained and regularization parameter used in the computation.

Corresponding regularization parameters λ are displayed in figure 4.7b. The amount of filtering is significantly higher when the SNR is 10 dB; therefore, the authors recommend applying the proposed method with a reasonable SNR (at least 20 dB). Moreover, increasing the value of lambda to $d/\Delta x = 5$ corresponds to a condition number around 10^{16} , which is the value above which instability of system (4.5) becomes critical [87]. Figure 4.8 shows very good agreement between the reconstructed velocity (for $d = 5$ cm, and SNR= 20 dB) and the solution. Small causality errors are observed because of the regularization filtering that tends to spread the signal out. Also because of filtering, the amplitude of the peak at the location of the impact is slightly under-estimated. This is also visible on the space-domain representation of the reconstructed fields displayed in figure 4.9. The peak corresponding to the impact is smoothed out because of regularization.

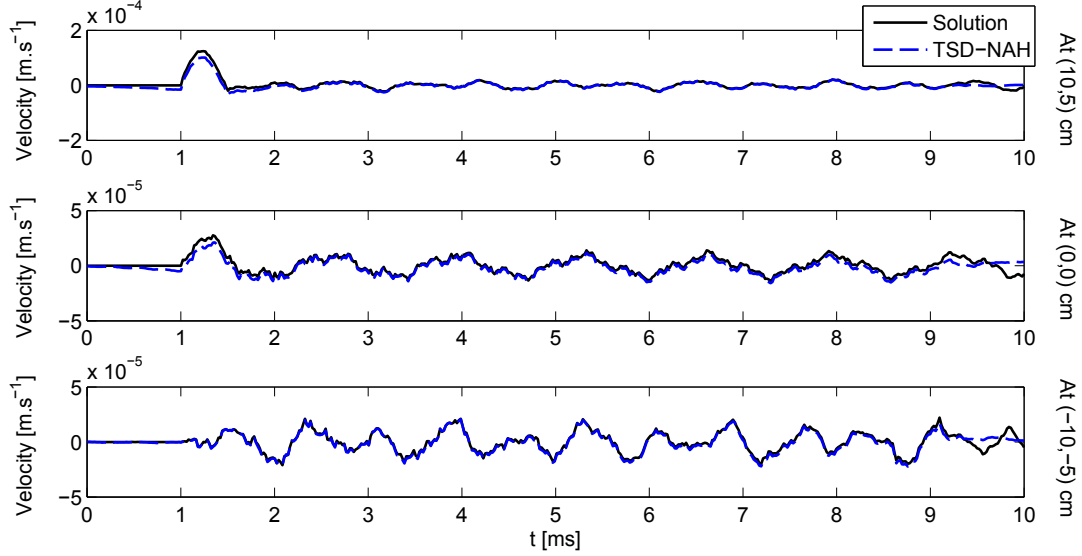


Figure 4.8 Comparison of the reconstructed velocity with the solution at the three positions indicated in figure 4.6b. First line is at the position of the impact (10, 5) cm (circle), second line is at the center of the plate (0, 0) cm (cross), and third line is at the symmetrical point of the impact (-10, -5) cm (triangle), for $d = 5$ cm, SNR=20 dB.

4.6 Experiment

In this section, TSD-NAH is applied on an impacted plate. The radiated pressure field is measured with an array of microphones and back-propagated to recover the plate vibration field. This field is compared to the velocity obtained from accelerometers. The purpose of this experiment is to show the applicability of the proposed method on an actual structure.

4.6.1 Experimental setup

The tested object is a rectangular plexiglass plate of size 50×30 cm and thickness 6.3 mm attached horizontally to a stiff structure using wires thus creating free plate conditions. A steel rod is released from an electro-magnet above the center of the plate, and hits the plate. This ensures good repeatability of the excitation. For the measurement of pressure field, a linear array of 64 free field microphones (1/4 inch diameter) is placed at a distance of 3 cm from the plate : as discussed in section 3, the quality of reconstruction could be improved for a smaller back-propagation distance, however, placing the microphones too close to the surface leads to saturation of the acquisition channels during the impact. The spacing between the centers of the microphones is 1 cm. Between each measurement, the microphone array is shifted laterally by 1 cm using a micrometric slide. This operation is repeated for 92 positions

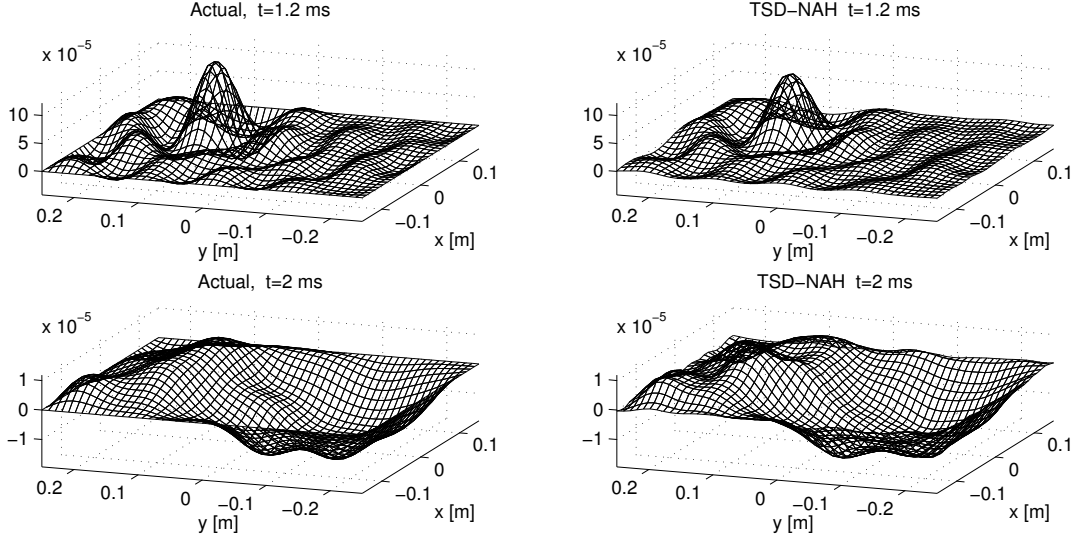


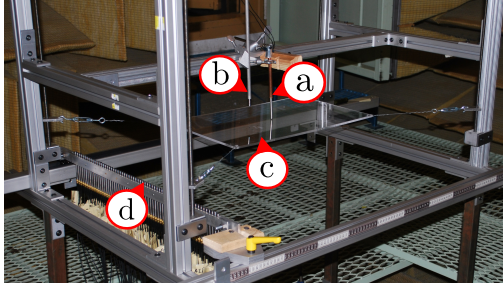
Figure 4.9 Comparison of the reconstructed velocity field with the solution at two time steps ($t = 1.2$ ms and $t = 2$ ms) for $d = 5$ cm, and $SNR = 20$ dB. Reconstructed values located outside the plate are ignored for better clarity.

of the array. A fixed 65th reference microphone is used to recover the phases between each position. The microphone sampling rate is 102.4 kHz. The test bench is placed in an anechoic chamber and is presented in figure 4.10a.

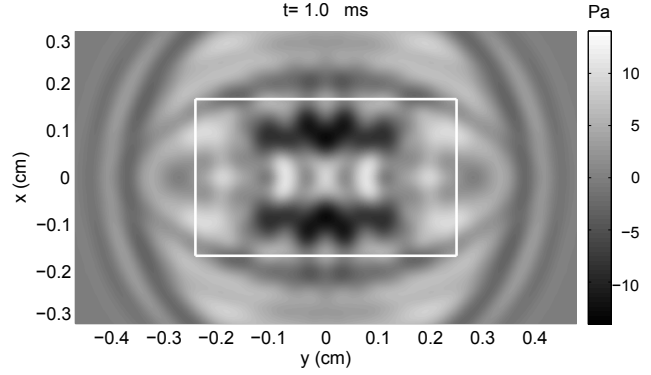
In order to compare TSD-NAH with another measurement technique, an accelerometer is used to measure the vibrations of the plate on a grid coinciding with the holographic reconstruction grid. The acceleration is used to derive the velocity of the plate after numerical integration using cumulative trapezoidal method. The measured pressure field is presented in figure 4.10b. This spatial representation shows that the repeatability of the excitation between each shifting of the array is good, because no high-wavenumber artefact along the shifting direction (i.e. along the y axis) is visible. Since the impact occurs at the center of the plate $(x, y) = (0, 0)$, the pressure field is symmetrical with respect to the x and y axes.

4.6.2 Experimental results

The back-propagated field is shown in figure 4.10 and is compared with the measured velocity. The first line corresponds to the normal velocity field 0.3 ms after the impact, when the waves start propagating towards the edges of the plate. As expected, the reconstructed field shows strong similarity with the actual velocity field. The second image shows the velocity field 0.5 ms after the impact, right after the first reflection from the longer edges



(a) Picture of the experimental setup. a) Impact rod. b) Reference microphone. c) Plexiglass plate. d) Array of microphones.



(b) Pressure field measured at a distance of 3 cm, 1 ms after the impact. The contour of the plate is represented by white lines.

of the plate. Unsurprisingly, the reflected waves can be seen as a field originating from two mirror image sources. These visualizations allow simple tracking of wavefront propagation in the material under investigation.

Figure 4.11 gives a Fourier domain representation of the back-propagated normal velocity. The most significant components of the velocity follows a dispersion relation of shape $\omega = \alpha k_r^2$ (where $k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ corresponds to the radial wavenumber). Such dispersion relation is expected for flexural waves in a plate. The value of the proportionality coefficient can be identified graphically, and linked with the physical parameters of the plate under consideration. By curve-fitting the data in figure 4.11, one can estimate the value of α of $3.1 \pm 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, considering the size of the pixels. Moreover, the equation of motion of a homogeneous plate leads to :

$$\alpha = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho_p(1-\nu^2)}}, \quad (4.11)$$

where E , ρ_p , h , and ν are respectively the Young's modulus, the density, the thickness and the Poisson's ratio of the plate. From this equation, one of the physical parameters can be estimated if all others are known. For example, knowing that $\rho_p = 1190 \text{ kg.m}^{-3}$, $\nu = 0.35$ and $h = 6.3 \text{ mm}$ for this given plate, the Young's modulus $3.0 \pm 0.2 \text{ GPa}$. The accuracy of this value is good since the actual value is 3.1 GPa [88], which falls in the estimated interval.

4.7 Conclusion

In this paper, a method based on acoustical measurements was proposed to assess transient vibration of plate-like structures. The formulation relies on a linear convolution between the measurements and a Green's function represented by a Toeplitz operator. Circularization

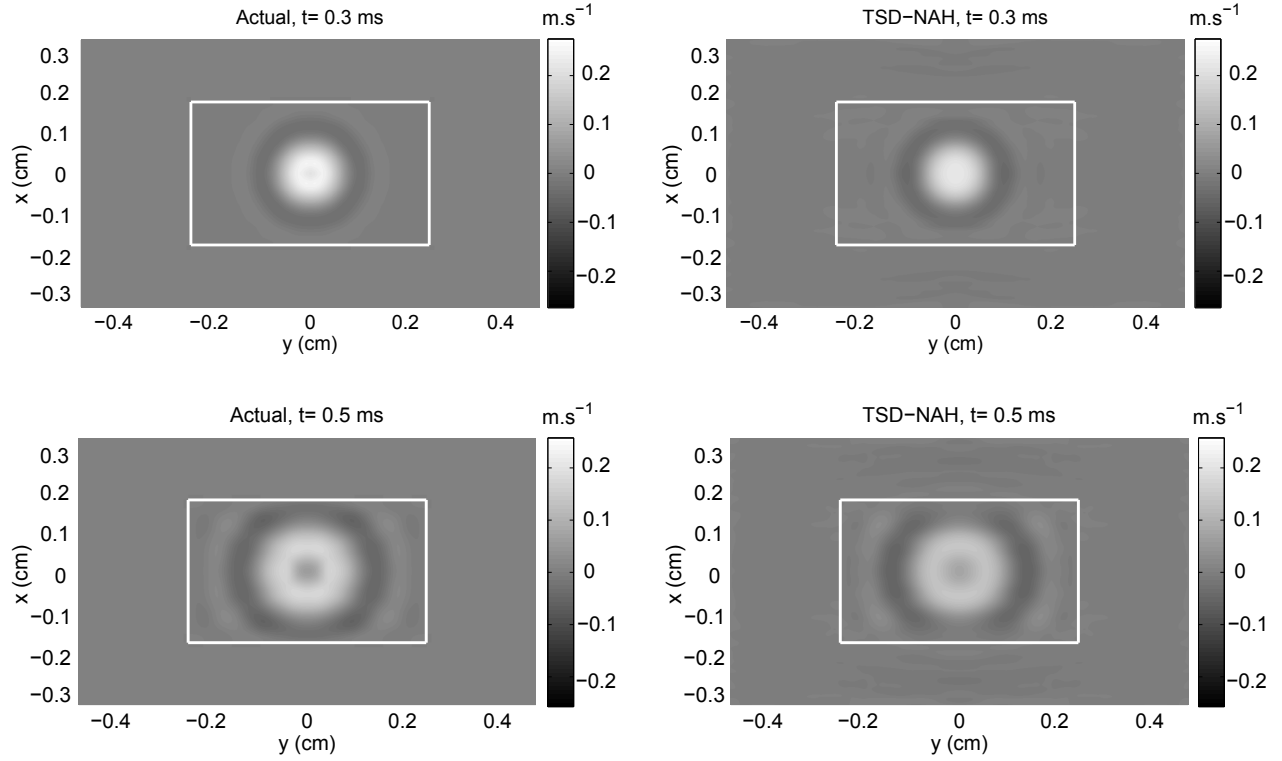


Figure 4.10 Comparison of the velocity field reconstructed by TSD-NAH with the actual field measured by accelerometers at two time steps (0.3 ms and 0.5 ms after the impact).

of this matrix is used in combination with Fast Fourier Transform and classical Tikhonov

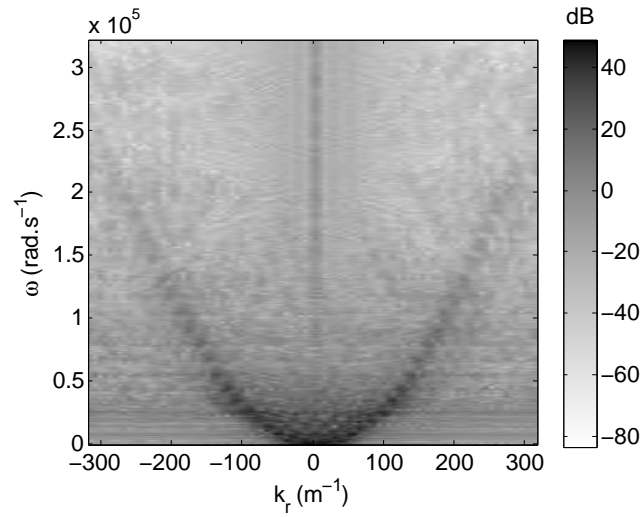


Figure 4.11 Fourier domain representation of the normal velocity over the plate.

regularization to efficiently solve this inverse problem. A first numerical case study on a membrane model shows that time–space sampling the Green’s function avoids spectral leakage and periodization which significantly improves the quality of the reconstruction compared to other NAH methods. A second numerical case study on a baffled simply supported plate shows that the proposed method is well-suited to investigate the transient vibration plate-like structures with minimal errors, provided that the SNR of the input is high enough (typically ≥ 20 dB), and the stand-off distance is small (typically less than 5 times the size of the spatial discretization). However, as for other inverse methods, the errors were shown to increase with greater back-propagation distance, as evanescent waves contribution quickly vanish. Time–space domain NAH was successfully applied on an actual plexiglass plate impacted by a steel rod. Back-propagated results show that the proposed technique allows visualization of the velocity field as a function of time, and is precise enough to evaluate material properties of the plate. Therefore, this method could be a viable alternative to other vibration field measurement techniques, and could be used in an industrial context as a non destructive testing tool for example. Future work could be made on computing of the tangential components of the velocity in the near-field using the time–space domain approach. Future effort could also be made on coupling ℓ_1 -norm sparse regularization with pressure-to-velocity TSD-NAH to eliminate the non causal part of the back-propagated field.

Acknowledgements

This research was supported by the Natural Science and Engineering Research Council of Canada. The authors would like to thank Vincent Dansereau for his contribution to the experimental part of this article, and X.-Z. Zhang for helpful discussions.

Parameters used for the numerical studies

Tableau 4.1 Parameters used for the piston

Parameter	Value
Piston radius (r_p)	0.15 m
Spatial discretization ($N_x = N_y$)	75
Time discretization (N_t)	500
Spatial domain size ($L_x = L_y$)	50 cm
Time domain size in t (L_t)	4 ms
Excitation frequency (f_p)	2500 Hz
Damping (γ)	3000
Amplitude (A)	0.01 m.s ⁻¹

Tableau 4.2 Parameters used for the plate

Parameter	Value
Yondg's modulus (E)	70 GPa
Poisson's ratio (ν)	0.35
Plate density (ρ)	2700 kg.m ⁻³
Modal damping (η)	5.10 ⁻⁴
Spatial discretization in x (N_x)	92
Spatial discretization in y (N_y)	64
Time discretization (N_t)	500
Time domain size in t (L_t)	10 ms

CHAPITRE 5 ARTICLE 2 : TRANSIENT FORCE ANALYSIS TECHNIQUE TO IDENTIFY TIME-VARYING LOADS AND DEFECTS ON PLATES

5.1 Préface

Les auteurs de cet article sont Nicolas Aujogue, et Annie Ross. Il a été soumis le 31 janvier 2019, et a été accepté le 26 mars 2019 dans les actes de conférence de l'*International Congress of Sound and Vibration*.

Ce chapitre expose une adaptation de la méthode RIFF (ici appelée FAT, en anglais) qui permet de traiter des plaques soumises à des excitations transitoires. Ici, on suppose que la structure à étudier est homogène et isotrope. Cet article s'intéresse à deux points principaux :

- la reconstruction des efforts appliqués sur la plaque, qui n'entre pas directement dans les objectifs de la maîtrise, mais qui est susceptible d'intéresser la communauté scientifique,
- la détection de défauts simples sur la plaque à partir d'une excitation transitoire, ce qui permet de répondre aux objectifs spécifiques (1) à (5), et en partie à l'objectif (6).

5.2 Abstract

Identifying vibration sources on structures is frequently impossible to perform via direct measurements, and has to be carried out by solving an inverse problem. In this context, this article presents an extension of the force analysis technique. This extension allows identifying transient loads on plate-like structures from the measurement of transverse displacements on a grid of points. The proposed method consists in injecting this data into the discretized equation of motion expressed in time and space domains to get the residual force of the equilibrium. To overcome the sensitivity of the problem to noise, a regularization step using Tikhonov's ℓ_2 cost function is performed. This formulation allows inspecting only part of the structure, and finding the time signature of dynamic loads. By adding prior knowledge on the source's location, the proposed method also allows pinpointing material inhomogeneities or defects, which cause non-zero residual forces outside the loading area. The technique is experimentally validated on a plexiglass plate on which an added mass representing a material defect is placed. The impact force is recovered from measurements on the plate : its location is successfully identified and the impact hammer data is compared to the reconstructed force. The knowledge of the force location is used to successfully detect the added mass.

5.3 Introduction

In many competitive sectors such as aeronautics, naval or building industry, new materials have been widely used in the few past decades to design light and thin structures. However, these structures can be damaged by vibration. This results in a critical need to estimate and control vibration levels of the designed parts. Due to the increasing processing power of modern computers, quantifying displacement fields caused by a given excitation can be performed accurately and quickly. However, sources often remain unknown because they cannot be directly measured, and therefore, have to be estimated. Since the 1970's various methods such as Transfer Path Analysis [89], techniques based on structural intensity [90] or other global methods [91] were developed to estimate vibration sources. The Virtual Fields Method using the principle of virtual work was developed since the late 80's, and recently adapted to perform stationary [53] or time-resolved [54] force reconstruction. In parallel, Pezerat *et al.* proposed the Force Analysis Technique (FAT), based on a local formulation of the equation of motion, which does not require knowing the boundary conditions of the problem. This method was first developed for stationary sources applied on simple structures such as beams [55] and plates [56], and was further extended to arbitrarily shaped structures by using a local finite element operator [92]. From this formalism, a significant number of advances were made to reduce errors due to the discretization scheme [61], to improve regularization [68], to estimate the physical parameters of a plate [62], or to detect material inhomogeneities [64]. A similar approach was derived by Bucaro *et al.* [44] to pinpoint defects knowing the stationary displacement field and the wave equation of the structure.

The present work aims at adapting the Force Analysis Technique to identify transient loads applied on thin plates. The time-domain formulation developed for the present method is an alternative to the time-domain reconstruction from frequency-domain formulations, that shows some limitations, especially in the low-frequency range [93]. In section 5.4, theoretical aspects behind transient FAT are explained. In section 5.5, the proposed method is applied on a plexiglass plate to recover the main characteristics of the excitation and to localize a structural defect.

5.4 Theory of transient FAT

In this section, the theoretical framework of this study is set. The equation of motion is presented, and its discretized counterpart is given. An efficient implementation scheme using FFT is proposed.

5.4.1 Theoretical framework

Let us consider a plate of thickness h , subjected to a transient normal force. In order to reduce the complex 3D vibration problem to a 2D problem, Kirchhoff's hypotheses for small deformations are assumed :

1. no shear deformation in the plate,
2. no elongation in the transverse direction,
3. rotational inertia negligible.

From these hypotheses, one can derive the equation of motion using the principle of virtual works :

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (5.1)$$

where $w(x, y, t)$ and $f(x, y, t)$ are respectively the transverse displacement and the normal surface load acting on the plate at location (x, y) and time t , E is the Young's modulus, ν is the Poisson's ratio, and ρ is the density of the plate.

The main idea behind FAT is to feed the displacement data into the left-hand side of Eq. (5.1) to get the force distribution as a function of time and space. However, since the input data is measured from an actual structure, the derivatives have to be approximated numerically using appropriate finite difference schemes.

5.4.2 Discretized formulation

In the following, we assume that the displacement field $w(x, y, t)$ is regularly sampled in all directions, with spacings Δ_x , Δ_y , Δ_t . Let us denote each sample of the displacement field by $w_{i,j,n}$, where i , j , and n correspond respectively to the index of the sample in the x , y , and t dimension. The approximation of the space derivatives are given by the following centered finite difference schemes :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \approx \delta_{i,j,n}^{x4} = \frac{1}{\Delta_x^4} \left(w_{i-2,j,n} - 4w_{i-1,j,n} + 6w_{i,j,n} - 4w_{i+1,j,n} + w_{i+2,j,n} \right) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \approx \delta_{i,j,n}^{y4} = \frac{1}{\Delta_y^4} \left(w_{i,j-2,n} - 4w_{i,j-1,n} + 6w_{i,j,n} - 4w_{i,j+1,n} + w_{i,j+2,n} \right) \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \delta_{i,j,n}^{x2y2} = \frac{1}{\Delta_x^2 \Delta_y^2} \left(w_{i-1,j-1,n} - 2w_{i,j-1,n} + w_{i+1,j-1,n} - 2w_{i-1,j,n} + 4w_{i,j,n} - 2w_{i+1,j,n} + w_{i-1,j+1,n} - 2w_{i,j+1,n} + w_{i+1,j+1,n} \right) \quad (5.4)$$

The time derivative is also approximated with a second-order centred scheme :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \approx \delta_{i,j,n}^{t2} = \frac{1}{12\Delta_t^2} \left(-w_{i,j,n-2} + 16w_{i,j,n-1} - 30w_{i,j,n} + 16w_{i,j,n+1} - w_{i,j,n+2} \right) \quad (5.5)$$

Since this paper presents an extension of the classical FAT method for transient excitations, the schemes presented in Eqs. (5.2), (5.3), and (5.4) were chosen to be the same as the ones used in classical FAT [56]. To be consistent with these previous developments, Eq. (5.5) is also chosen of to be centred and of second order. By injecting Eqs. (5.2) to (5.5) into the equation of motion, we get :

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\delta_{i,j,n}^{x4} + 2\delta_{i,j,n}^{x2y2} + \delta_{i,j,n}^{y4} \right) + \rho h \delta_{i,j,n}^{t2} = f_{i,j,n} \quad (5.6)$$

According to Eq. (5.6), the force acting on the structure at a given sample (i, j, n) can be computed from the samples of w involved in Eqs. (5.2) to (5.5). In other words, the mechanical loading can be expressed as a convolution of the three-dimensional matrix $(w_{i,j,n})$ with a kernel $\mathbf{k} = (k_{i,j,n})$. The $k_{i,j,n}$ can be derived from Eq. (5.6) : they are directly determined by the coefficients of the proposed discretization schemes, and the physical properties of the plate (Young's modulus, density, thickness, and Poisson's ratio). This 3D-convolution is a linear operation, therefore, it can be represented by a matrix \mathbf{C}_k , which is block-circulant :

$$\mathbf{C}_k w = f \quad (5.7)$$

A simple computation of this convolution yields erroneous results the moment the input data is corrupted by noise. This is due to the fact that, although Eq. (5.7) does not have to be inverted (since the aim is to compute f from the measured w), it has the characteristics of an inverse problem. Physically, this kind of difficulty is encountered when trying to infer the causes of a phenomenon (here, the excitation force) from the observation of its consequences (here, the vibration field). This circulant formalism is therefore unable to handle the ill-posedness of the problem, and has to be supplemented with regularization.

5.4.3 Regularization and windowing steps

The proposed approach used to solve this ill-posed problem is to perform a regularization. In order to apply Tikhonov's regularization [94], the inverse of the system (5.7) has to be considered. The regularized solution f_r is computed by adding a penalty term on the norm of the solution to the initial problem :

$$f_r = \arg \min_f \left(\| \mathbf{C}_{\mathbf{k}}^{-1} f - w \|^2 + \lambda \| f \|^2 \right), \quad (5.8)$$

where $\| \cdot \|$ stands for the ℓ_2 norm, and the regularization parameter λ is a scalar. This parameter sets the balance on the trade-off between the residue of the system and the energy of the excitation force. Therefore, it must be chosen carefully since the regularized solution f_r strongly depends on this term. Several methods are frequently used to choose automatically this parameter by optimizing a certain cost function. This is for example the case for the L-curve method [83], Generalized Cross-Validation [24], and empirical Bayesian regularization [68]. An explicit solution to Eq. (5.8) exists, and can be handily expressed by considering the diagonalization of $\mathbf{C}_{\mathbf{k}}$. Since $\mathbf{C}_{\mathbf{k}}$ is block-circulant, it can be diagonalized using the 3D-DFT matrix \mathbf{F} [95] :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{k}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{\Delta} \mathbf{F}, \quad (5.9)$$

where $\mathbf{\Delta}$ is a diagonal matrix formed by the Fourier coefficients of \mathbf{k} . Using this decomposition, an explicit solution to Eq. (5.8) exists, and can be arranged as follows :

$$f_r = \left(\mathbf{I}_N + \lambda \mathbf{F}^{-1} \mathbf{\Delta} \mathbf{\Delta}^H \mathbf{F} \right)^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{k}} w, \quad (5.10)$$

where \mathbf{I}_N stands for the identity matrix of size $N \times N$ (N is the total number of elements of the domain $N_x \times N_y \times N_t$), and the superscript H stands for the conjugate transpose. This regularized solution can be looked at as the naive solution $\mathbf{C}_{\mathbf{k}} w$ on which a filter is applied. This expression can be further simplified using the 3D-Fourier transform (denoted by \mathcal{F}) of w and \mathbf{k} :

$$f_r = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{1 + \lambda |\mathcal{F}(\mathbf{k})|^2} \mathcal{F}(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{F}(w) \right]. \quad (5.11)$$

This expression allows efficient computations, and avoids building explicitly the $N \times N$ matrix $\mathbf{C}_{\mathbf{k}}$, which can be large. In addition to this regularization, a windowing step is necessary to avoid the edge effects due to the convolution. Indeed, the previous formulation relies on circular convolution, which assumes periodicity of the signals convolved, therefore, on the edges of the measurement field, where the non-zero elements of the kernel overlaps with

the periodic repetition of the domain, undesired components are introduced. They must be removed by multiplying the force with a 3D-Tukey window $T(x, y, t)$ before the filtering step :

$$T(x, y, t) = T_{\alpha_x}\left(\frac{x}{L_x}\right) T_{\alpha_y}\left(\frac{y}{L_y}\right) T_{\alpha_t}\left(\frac{t}{L_t}\right), \quad (5.12)$$

The windowing parameters α_x , α_y and α_t define the width of the decaying part of T (of width $\alpha_x N_x$, $\alpha_y N_y$, and $\alpha_t N_t$, respectively in directions x , y , t). A simple criteria can be applied to choose them : the tapered part should at least cover the zone where the overlap occurs (of width 5 points in all directions, since Eq. (5.6) involves samples from $w_{i-2,j,n}$ to $w_{i+2,j,n}$, from $w_{i,j-2,n}$ to $w_{i,j+2,n}$ and from $w_{i,j,n-2}$ to $w_{i,j,n+2}$). In the following, this rule of thumb is applied, and the windowing coefficients are set to $\alpha_x = 2 \times \frac{5}{N_x}$, $\alpha_y = 2 \times \frac{5}{N_y}$, $\alpha_t = 2 \times \frac{5}{N_t}$. The expression derived in Eq. (5.11) and the proposed windowing are implemented in the procedure summed up in Fig. 5.1. The convolution kernel must be built and zero-padded to match the size of the displacement field. The convolution is made by multiplying signals in the Fourier domain. The windowing is applied before applying the regularization filter.

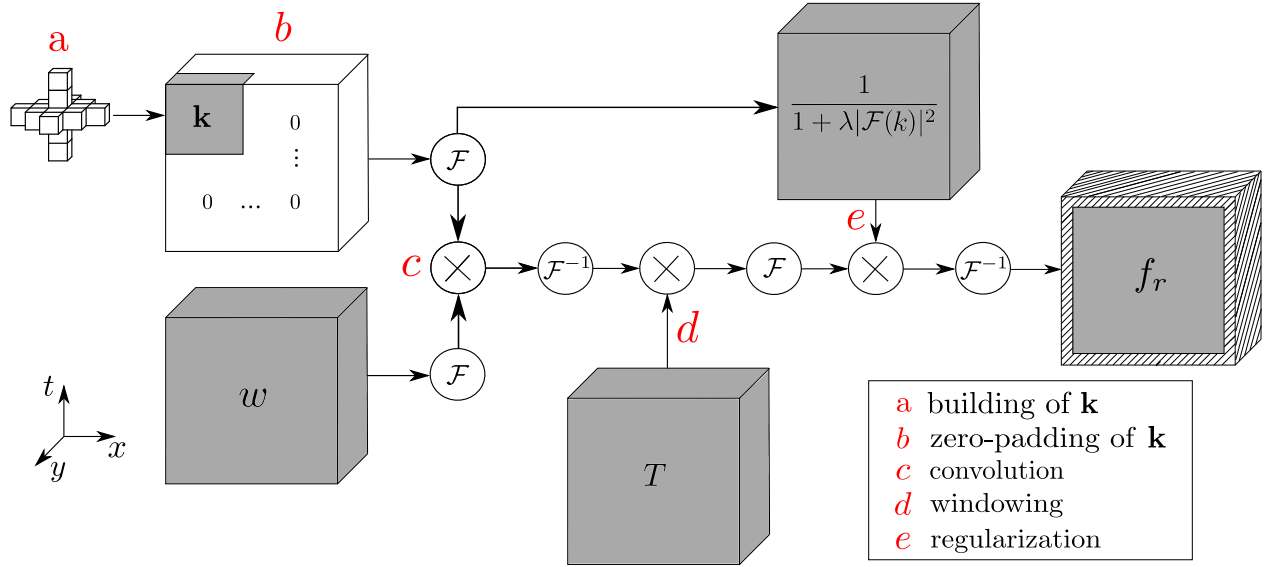


Figure 5.1 Block diagram summarizing the steps involved to compute the force distribution. \mathcal{F} and \mathcal{F}^{-1} denotes 3D-FFT and inverse 3D-FFT. The hatched area represents the samples of the output affected by the windowing step.

5.5 Experiments

In this section, an experimental validation of transient FAT is achieved. After presenting the test bench and the measurement procedure, the reconstructed force is analyzed to identify the impact on the plate (location and time signature), and to detect a defect in the plate.

5.5.1 Experimental setup

The structure under investigation is a rectangular plexiglass plate of dimension 50×30 cm, and of thickness 6.5 mm, on which a mass of 23 g is glued at position $(0.34, 0.10)$ m ($(0, 0)$ m is the upper left corner of the plate). The plate is hooked on a rigid base frame. The Young's modulus of the plate is $E = 3.1$ GPa, the density is $\rho = 1190$ kg.m⁻³, and the Poisson's ratio is $\nu = 0.37$. An impact hammer (PCB 086C01) is mounted on ball bearing, and acts as a pendulum hitting the plate at position $(0.21, 0.18)$ m. The hammer is released by an electromagnet to ensure satisfying repeatability of the shock (see Fig. 5.2). A vibrometer (Polytec OFV-505/5000) is used to scan the transverse velocity of the full plate, over a 1×1 cm grid. The data is sampled at 102.4 kHz, and the duration of acquisition is 20 ms. The data obtained from the impact hammer is stored and used to recover the phase of the normal displacement at each point. Since the laser vibrometer outputs the normal velocity, a numerical integration is necessary to get the normal displacement of the plate, otherwise, the time derivative of the loading $\frac{\partial f_r}{\partial t}$ would be computed instead of f_r . This step is performed via cumulative trapezoidal numerical integration. Even if it was not the case in our study, measurement noise can produce drift during integration. The authors suggest removing it by high-pass filtering the signal before applying transient FAT.

5.5.2 Results and analysis

A snapshot of the measured displacement field is presented in Fig. 5.3a. The spatial smoothness of the data indicates that signals acquired at each point are successfully phased, and that the effect of drift due to time integration can be neglected. From unprocessed displacement maps, the position of the impact cannot be precisely determined, and the added mass is not detectable. Fig. 5.3b also shows that the time evolution of the impact force is hard to infer from raw data, and that signals obtained at the impact and mass positions do not have special features compared to displacements at other positions of the plate.

The method described in Fig. 5.1 is then applied on the measured dataset. The regularization parameter $\lambda = 10^{-21.1}$ is selected using Generalized Cross Validation. After processing

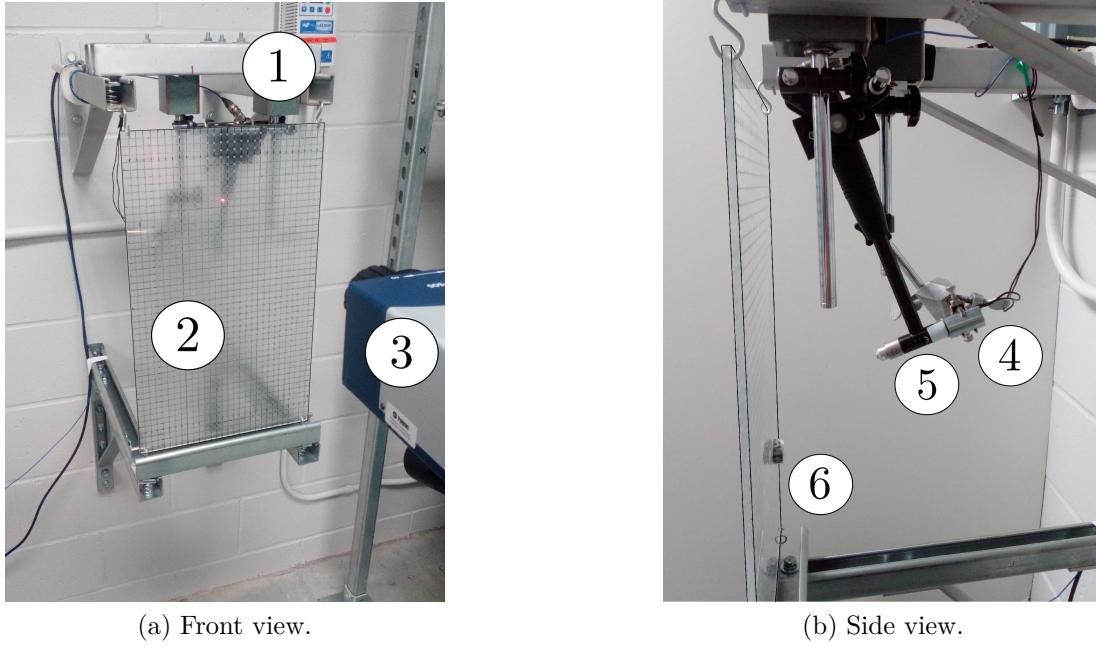


Figure 5.2 Front view (a) and side view of the setup (b). 1) base frame. 2) plexiglass plate. 3) laser vibrometer. 4) electromagnet. 5) impact hammer. 6) added mass.

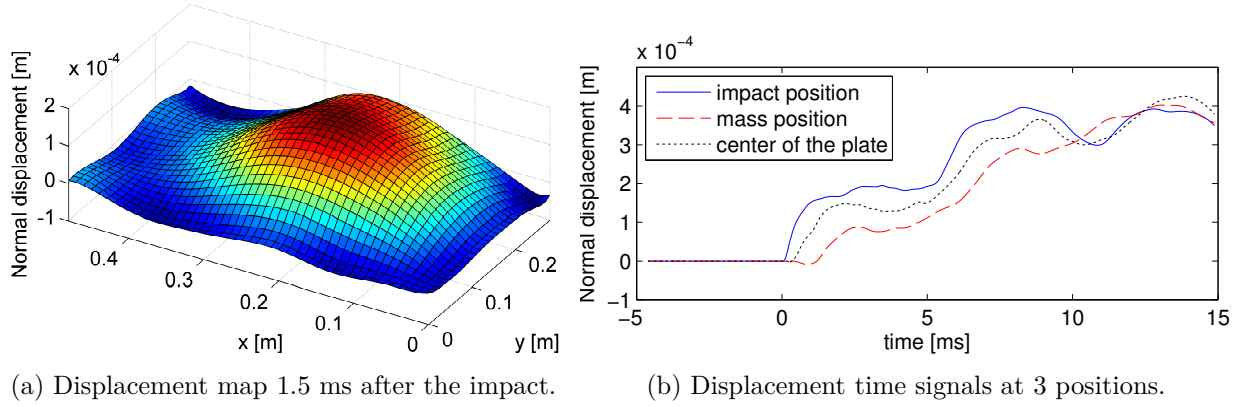


Figure 5.3 Measured displacement field.

the displacement field, the loading f_r , which is presented on Fig. 5.4, is known as a function of time and space. Between $t = 0$ ms and $t = 0.7$ ms, a peak located at $(x, y) = (0.21, 0.18)$ m indicates the estimated position and duration of the excitation. It is visible on the root mean square (RMS) map in Fig. 5.4a. The cross denotes the position of the impact, and the circle denotes the position of the mass.

After the impact, the plate is not subjected to any active load. However, a non null residual is observed at the position of the added mass. This mass does not affect the stiffness term in Eq. (5.6); in the inertia term however, the locally added mass is not taken into account. Therefore, in order for the equation to be balanced, the right-hand term of Eq. (5.6) is non-null even though no force is applied at this position. In Fig. 5.4b, the root-mean square value of the field is computed between $t = 2.5$ and 3.5 ms. This disturbed equilibrium is clearly visible and matches the position of the defect.

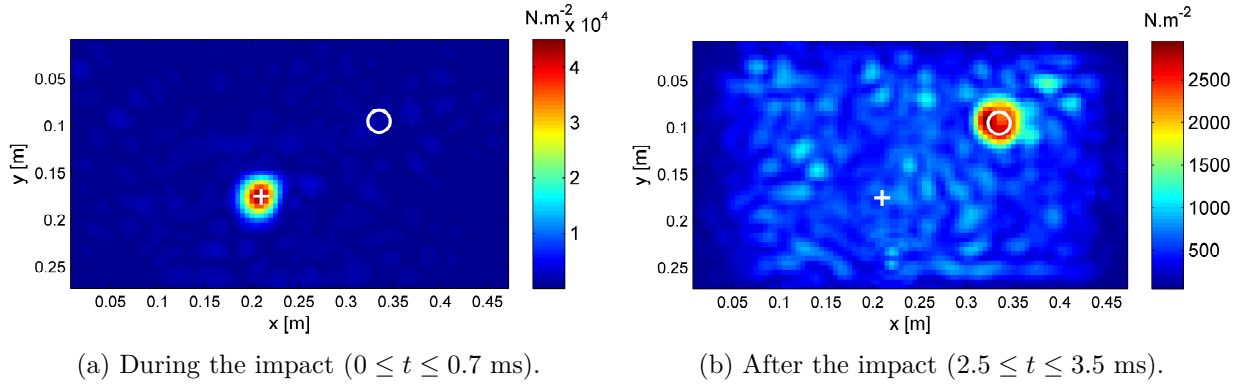


Figure 5.4 RMS values of the distributed loading computed using transient FAT.

In addition to impact localization and fault detection, the proposed method allows assessing the time signal of the impact force by integration of the surface load over the impact region, as shown in Fig. 5.5. The signals have been normalized prior to comparison. In fact, the reconstructed force has a significantly lower norm than the actual signal measured with the impact hammer : due to the filtering made during the regularization step, important components of the signal are removed, as well as undesired components that arise from the amplification of the measurement noise. Therefore, the output of the proposed method does not provide accurate information about the intensity of the excitation force. However, even though the duration of the contact is overestimated, the instant of the impact is correctly identified, and the overall shape of the signal is reconstructed.

5.6 Conclusion

This paper presented a method for the identification of transient loads applied on a plate, from the knowledge of displacements and material properties of the structure. It was shown that Tikhonov's ℓ_2 regularization addresses the ill-posedness of the problem, and that the use of a circulant formalism allows efficient computation of the regularized solution by using

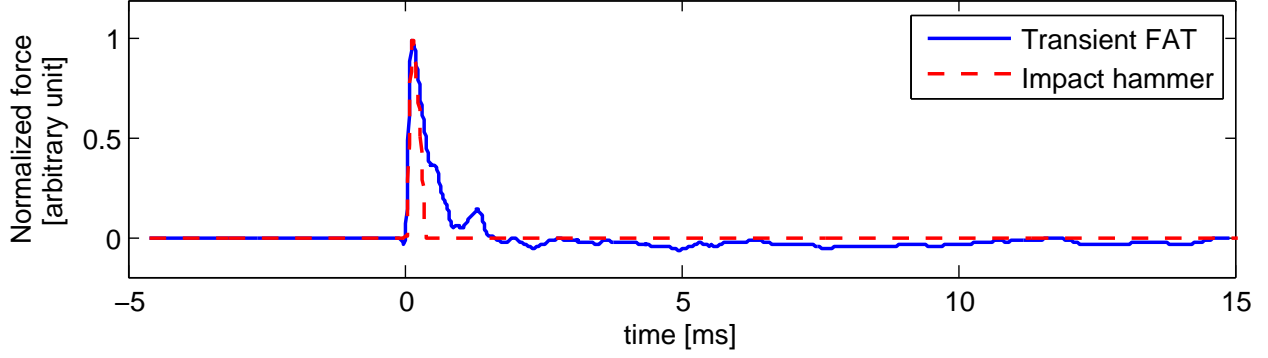


Figure 5.5 Superposition of the impact signal measured by the impact hammer and the force obtained by transient FAT.

three-dimensional Fast Fourier Transform. The proposed method was successfully applied on data obtained from a plexiglass plate, to demonstrate that time-resolved identification and localization of transient loads can be performed, even though accurate estimation of magnitude is difficult. An added mass bonded on the plate was successfully detected and localized, which provides a proof of concept for fault detection on plate-like structures. Future works could include the adaptation of the proposed method for non-isotropic materials, or could improve transient FAT by taking into account damping terms in the equation of motion.

5.7 Acknowledgements

This research was supported by the Natural Science and Engineering Research Council of Canada. The authors would like to thank Vincent Dansereau for his contribution to the experimental part of this article.

CHAPITRE 6 EXTENSION DE LA MÉTHODE RIFF AUX MATÉRIAUX STRATIFIÉS

6.1 Introduction

Ce chapitre présente une extension de la méthode RIFF présentée au chapitre précédent, qui s'applique aux matériaux composites, et permet de répondre à l'objectif spécifique (6) : "La technique devra être à la fois utilisable sur des matériaux homogènes et isotropes, mais aussi sur les matériaux multi-couches". En particulier il est possible avec cette méthode d'inspecter les matériaux stratifiés, qui sont largement utilisés pour concevoir des pièces structurales. Cette méthode repose sur le même principe qu'au chapitre précédent. Le terme de flexion est cette fois-ci composé de cinq termes qui dépendent de la matrice de rigidité de la plaque. La première section se concentre sur les aspects théoriques de la méthode. Une validation numérique s'appuyant sur des calculs par éléments finis est proposée à partir de la réponse d'une plaque composite comportant deux défauts. Une validation expérimentale sur une plaque en stratifié carbone/epoxy permet de confirmer l'applicabilité de la technique. Les limites de cette méthode sont également soulignées.

6.2 Extension de la méthode RIFF transitoire

Dans ce chapitre, on considère une plaque d'épaisseur h dont la matrice de rigidité ABD est connue. L'objectif est de détecter des défauts potentiellement présents dans la plaque. Pour cela, les hypothèses de Kirchhoff et des petits déplacements sont également supposés pour simplifier le problème. L'équation du mouvement est alors :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (6.1)$$

où $w(x, y, t)$ et $f(x, y, t)$ sont respectivement le déplacement transverse et la force surfacique appliquée sur la plaque, et $\mathbf{D} = (D_{ij})_{i,j=1,2,6}$ est la matrice de flexion. La masse surfacique m_0 est calculé par intégration de la masse volumique sur l'épaisseur de la plaque :

$$m_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \, dz \quad (6.2)$$

Notons que la formulation développée ici englobe celle présentée dans l'article 2. En effet, en supposant que la plaque est homogène et constituée d'un matériau isotrope de masse volumique ρ d'épaisseur h , de module de Young E , et de coefficient de Poisson ν , on a :

$$D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (6.3)$$

et :

$$D_{16} = D_{26} = 0 \quad (6.4)$$

Dans ce cas, on retrouve bien l'équation (5.1) :

$$\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (6.5)$$

Ici aussi, on suppose que le champ de déplacement $w(x, y, t)$ est échantillonné régulièrement dans toutes les directions, avec un espacement $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_t$. Les dérivées $\frac{\partial^4}{\partial x^4}, \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ sont approximées par les schémas (5.2), (5.3), (5.4), (5.5). Les autres dérivées sont approchées par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} \approx \delta_{i,j,k}^{x3y1} &= \frac{1}{4\Delta_x^3 \Delta_y} \left(w_{i-2,j-1,k} - 2w_{i-1,j-1,k} + 2w_{i+1,j-1,k} + w_{i+2,j-1,k} \right. \\ &\quad \left. + w_{i-2,j+1,k} - 2w_{i-1,j+1,k} + 2w_{i+1,j+1,k} + w_{i+2,j+1,k} \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \approx \delta_{i,j,k}^{x1y3} &= \frac{1}{4\Delta_x \Delta_y^3} \left(w_{i-1,j-2,k} - 2w_{i-1,j-1,k} + 2w_{i-1,j+1,k} + w_{i-1,j+2,k} \right. \\ &\quad \left. + w_{i+1,j-2,k} - 2w_{i+1,j-1,k} + 2w_{i+1,j+1,k} + w_{i+1,j+2,k} \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Ces schémas de discrétisation sont choisis pour garder la cohérence avec ce qui a déjà été fait : ils sont donc centrés d'ordre 2. La force surfacique appliquée sur la plaque est exprimée comme la convolution tri-dimensionnelle de $(w_{i,j,n})$ avec un noyau de convolution $\tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{k}_{i,j,n})$. Celui-ci est différent du noyau utilisé au chapitre précédent. En effet, l'équation du mouvement fait appel à huit échantillons $w_{i,j,n}$ en plus de ceux utilisés dans le cas isotrope. Le noyau de convolution possède donc huit éléments non nuls en plus (en gris sur la figure 6.1b).

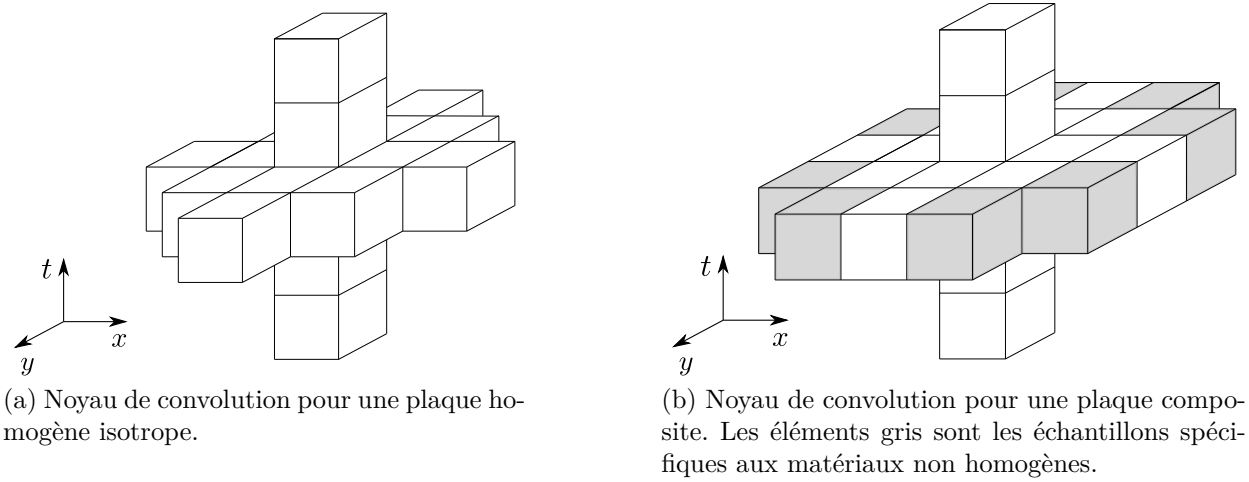


Figure 6.1 Comparaison des noyaux de convolution utilisés dans le cas homogène et le cas stratifié.

La convolution circulaire tri-dimensionnelle est représentée par la matrice bloc-circulante $\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{k}}}$:

$$\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{k}}} w = f \quad (6.8)$$

L'instabilité de la solution f au bruit de mesure sur w nous oblige à effectuer une régularisation. Pour rester consistant avec les développements précédents, la régularisation de Tikhonov est choisie :

$$f_r = \arg \min_f \left(\|\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{k}}}^{-1} f - w\|^2 + \lambda \|f\|^2 \right), \quad (6.9)$$

En diagonalisant la matrice par la matrice de Transformée de Fourier discrète, on peut écrire la solution comme :

$$f_r = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{1 + \lambda |\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{k}})|^2} \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{k}}) \cdot \mathcal{F}(w) \right]. \quad (6.10)$$

À la figure 6.2, la réponse fréquentielle de la méthode fréquentielle indique clairement que cette formulation permet de prendre en compte l'anisotropie d'un matériau, contrairement à celle présentée au chapitre 5. L'opérateur utilisé agit comme un filtre qui coupe toutes les composantes dues aux vibrations naturelles de la plaque, et fait ressortir les autres composantes. Les composantes naturelles, sont regroupées sur un lieu de points qui donne les nombres d'onde générés dans la plaque à chaque fréquence. Lorsque l'on s'intéresse à une plaque homogène et isotrope (comme sur la figure 6.2a, qui représente le cas d'une plaque d'aluminium), ce lieu de point donne la relation de dispersion $(k_x(\omega), k_y(\omega))$. Les points du domaine des k qui vérifient la relation de dispersion sont répartis sur un cercle et sont définis

par :

$$k_x^2 + k_y^2 = \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}} \omega^2 \quad (6.11)$$

Dans le cas d'un matériau anisotrope, la relation de dispersion dépend de l'angle de propagation des ondes. Celle-ci s'écrit :

$$D_{11}k_x^4 + D_{22}k_y^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})k_x^2k_y^2 + 4D_{16}k_x^3k_y + 4D_{26}k_xk_y^3 = m_0\omega^2 \quad (6.12)$$

La figure 6.1b représente la réponse de l'opérateur dans le cas d'une plaque composée d'un pli unidirectionnel de fibre de carbone renforcée par une matrice epoxy, d'épaisseur 2 mm. On voit clairement que l'orientation des fibres selon l'axe x favorise la propagation des ondes dans cette direction, puisque la vitesse de phase dans cette direction est plus élevée.

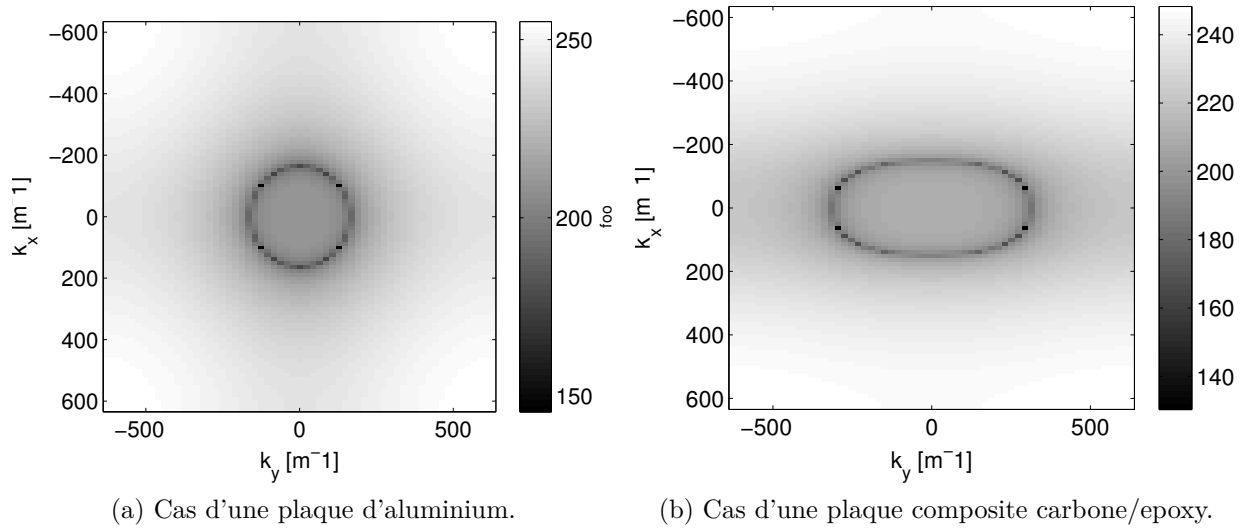


Figure 6.2 Réponse de l'opérateur : $20 \log_{10} |\mathcal{F}(\tilde{k})|$, pour une fréquence de 12,5 kHz.

6.3 Validation numérique

La validation numérique de cette technique se fait sur une plaque composite carbone/epoxy de dimensions 50×30 cm, et d'épaisseur 2 mm. Les modes de vibration de la plaque stratifiée sont calculés par éléments finis en utilisant le module ACP d'ANSYS. Sa réponse à une excitation impulsionnelle en son centre est calculée par superposition modale. Les propriétés des plis uni-directionnels sont données dans le tableau 6.1, et sont tirées de la liste de matériaux pré-paramétrés d'ANSYS.

Tableau 6.1 Paramètres utilisés pour calculer la réponse de la plaque

Paramètre	Valeur
Module de Young (direction des fibres : axe x)	121 GPa
Module de Young (direction transverse : axe y)	8,6 GPa
Coefficient de Poisson (direction x - y)	0.27
Module de cisaillement (direction x - y)	4,7 GPa
Masse volumique	1490 kg.m ⁻³

Dans le but d'évaluer la capacité de la méthode RIFF à détecter des défauts, deux zones ont été modifiées pour modéliser des défauts. La première zone a une matrice de rigidité modifiée par le fait que les fibres de carbone sont orientées à 30 degrés par rapport au reste de la plaque. La seconde zone a une masse surfacique m_0 modifiée par le fait que la masse volumique locale est multipliée par 3. Les deux zones sont de forme circulaire et ont un diamètre de 3 cm.

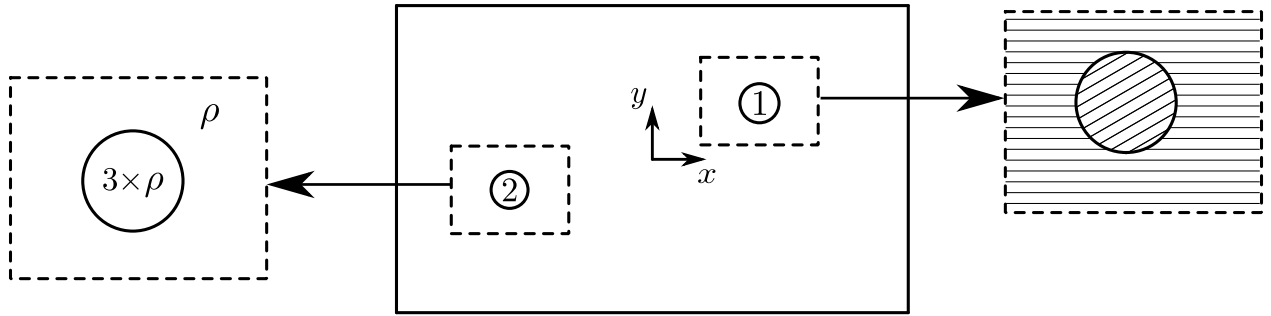


Figure 6.3 Configuration de la plaque étudiée. La zone 1 correspond à un désalignement des fibres de 30 degrés, et est située à $(x, y) = (10; 5)$ cm. La zone 2 correspond à une masse ajoutée, et est située à $(x, y) = (-15; -3)$ cm.

En observant le déplacement de la plaque sur la figure 6.4, il est clair que le comportement anisotrope de la plaque ne peut pas être négligé, et que le formalisme développé au chapitre 5 ne peut pas s'appliquer sur ce type de données. Les défauts dans la plaque génèrent une petite perturbation du front d'onde au cours de la première milliseconde après l'impact. Ces perturbations sont surtout visibles sur la figure 6.4b aux positions $(x, y) = (10; 5)$ cm et $(x, y) = (-15; -3)$ cm, où l'on voit que l'amplitude est très légèrement modifiée par la présence du défaut. Cependant, sans information a priori, la simple visualisation du déplacement ne suffit pas à conclure à la présence d'un défaut.

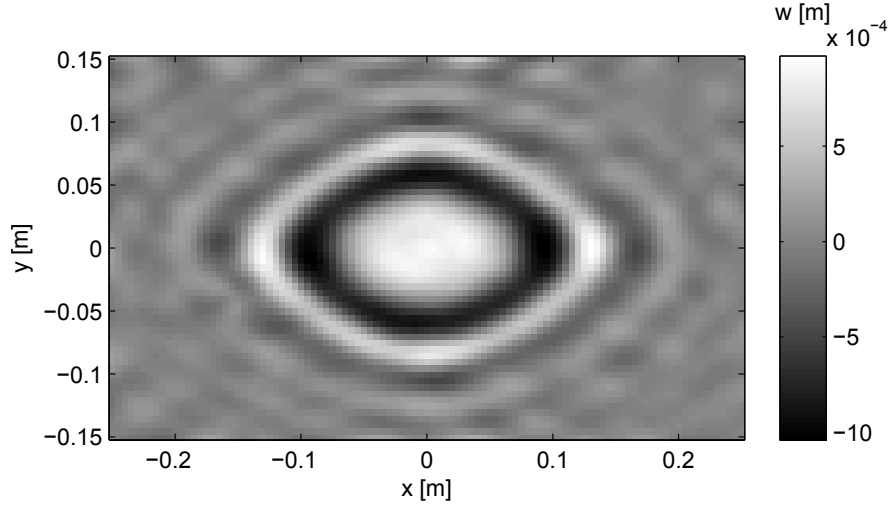
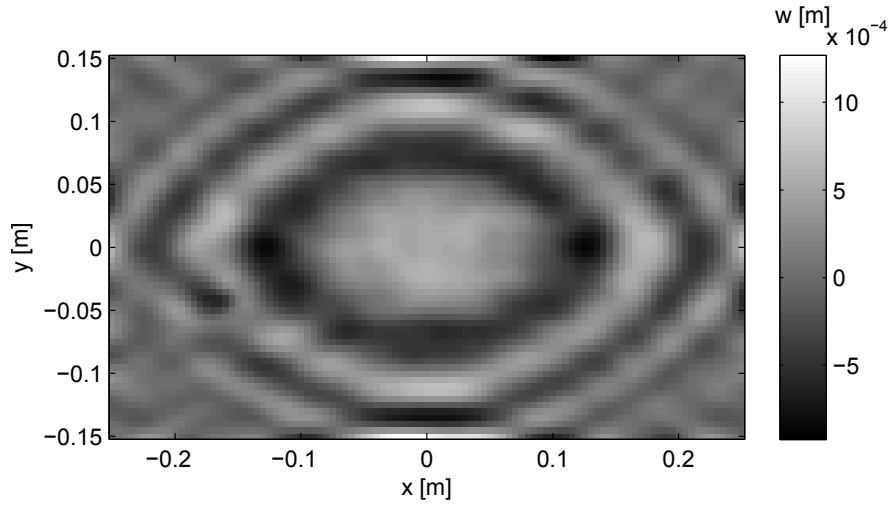
(a) Champ de déplacement à $t = 0,2$ ms.(b) Champ de déplacement à $t = 0,3$ ms.

Figure 6.4 Visualisation du champ de déplacement calculé par superposition modale à deux instants différents.

Pour modéliser l'erreur de mesure, on ajoute à ce jeu de données un bruit blanc Gaussien dont la variance est ajustée pour obtenir un rapport signal sur bruit de 20 dB. Pour choisir le paramètre de régularisation, on utilise ici la méthode Bayésienne. Le paramètre de régularisation optimal calculé est $\lambda = 3 \times 10^{-23}$. La convergence vers cette valeur est illustrée à la figure 6.5. La fonction à minimiser présente un minimum global très net, ce qui indique que cette méthode de détermination du paramètre de régularisation est robuste et adaptée à la méthode développée lors de cette maîtrise. L'utilisation d'une telle méthode permet de répondre à l'objectif spécifique (4), car le paramètre de régularisation est choisi automatiquement pour la méthode RIFF transitoire.

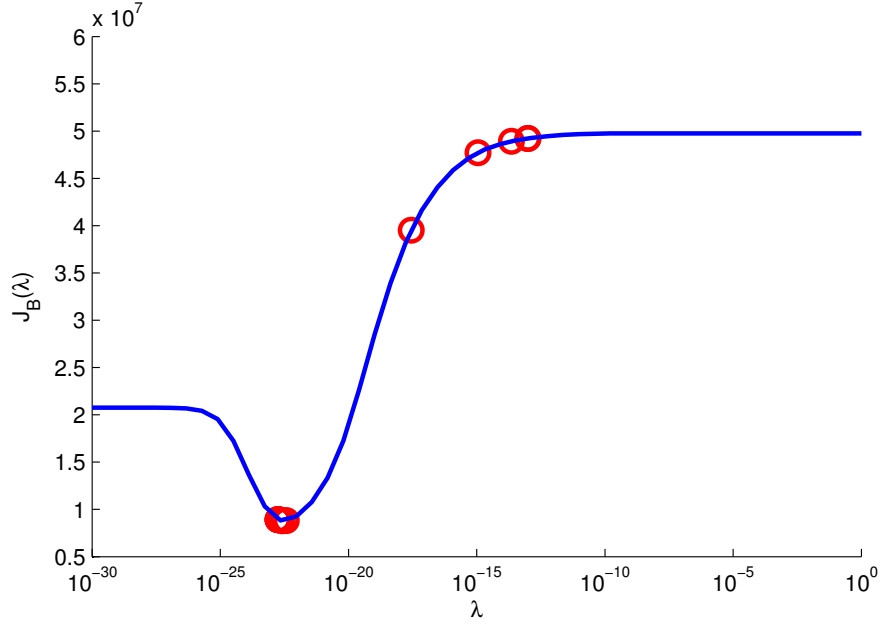


Figure 6.5 Fonction à optimiser pour déterminer le paramètre de régularisation optimal. Les cercles rouges correspondent aux itérations successives de l'algorithme du gradient utilisé pour minimiser $J_B(\lambda)$.

Une fois que la méthode RIFF est appliquée, les défauts peuvent être localisés sans ambiguïté en observant le champ de forces résultant. Au moment de l'impact, la force d'excitation prédomine, et les défauts ne sont pas visibles. À la fin du contact, le résidu devrait être nul partout où les équations du mouvement sont respectées. Sur les zones 1 et 2 (voir figure 6.3), une modification de la matrice de rigidité ou de la masse surfacique cause un déséquilibre qui se traduit par un résidu non nul. En calculant la valeur RMS du résidu sur les instants après l'impact, les défauts ressortent clairement (figure 6.6). En valeur RMS, la force au centre des défauts est 10 fois supérieure à la valeur en dehors des défauts. Un tel écart permet de dire que sur cet exemple numérique, l'objectif spécifique (3) est rempli : "La méthode devra être choisie de manière à maximiser le rapport signal sur bruit pour que la présence ou l'absence de défaut soit la moins ambiguë possible". Si la localisation et la forme des défauts est bien déterminée, sa taille est légèrement sur-estimée. Cela est dû au fait que le noyau de convolution a une largeur de 5 points dans les directions x et y , et que lors de la convolution, à chaque position où le noyau est superposé avec le défaut, un résidu non nul apparaît, même si le centre du noyau est en dehors du défaut. La taille des défauts identifiés à la figure 6.6 est donc logiquement 4 pixels plus large que la taille réelle du défaut. Néanmoins, en ayant connaissance de cet effet, l'estimation de la taille du défaut peut être corrigée. La méthode présentée répond donc bien à l'objectif spécifique (1) : "La méthode développée devra permettre de

localiser les défauts, d'évaluer leur taille, leur forme, et de quantifier leur sévérité".

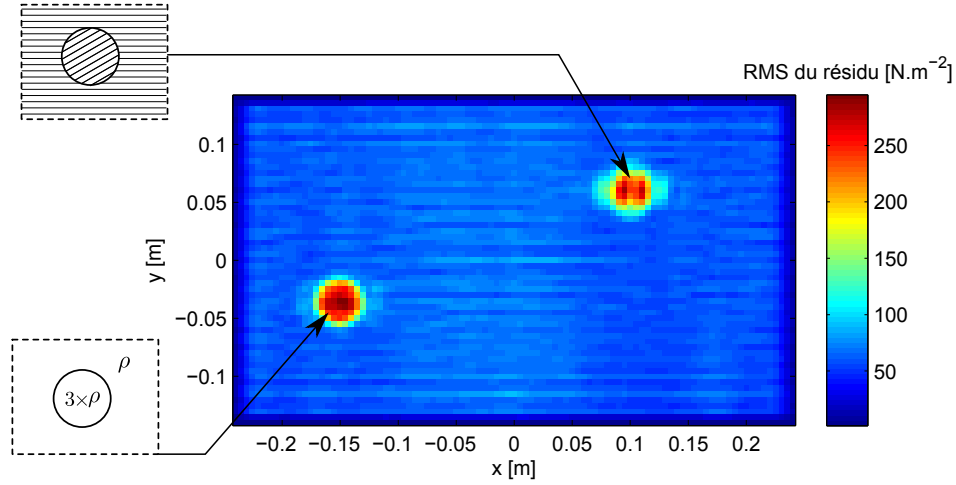


Figure 6.6 Carte RMS du résidu calculé par méthode RIFF entre $t = 0,5$ ms et $t = 10$ ms.

Bien que cela ne fasse pas partie explicitement des objectifs de cette maîtrise, la méthode RIFF transitoire nous permet d'identifier l'effort appliqué sur la structure. Comme au chapitre précédent, la forme de la signature temporelle est correctement estimée (figure 6.7c). Au point d'impact, la norme de l'effort est considérablement réduite par l'effet du filtre de régularisation (voir figure 6.7a). Le filtre de régularisation a en effet tendance à étaler spatialement l'énergie du résidu identifié. Il est possible d'estimer la norme de l'effort appliqué en intégrant le résidu sur une zone contenant le point d'impact : sur la figure 6.7b, le résidu est intégré sur une zone de 3×3 points centrée autour du point d'impact. Néanmoins, cette estimation n'est possible que si l'on suppose qu'une seule excitation est appliquée sur le domaine d'intégration, ce qui constitue une limitation si l'on ne dispose pas d'information à priori sur le nombre de sources d'excitation appliquées à la structure.

6.4 Validation expérimentale

La partie numérique de ce chapitre permet de confirmer que les objectifs de la maîtrise peuvent théoriquement être atteints avec la méthode RIFF transitoire. Pour vérifier la robustesse de cette méthode aux imprécisions inhérentes à la pratique, une validation expérimentale est également proposée. Deux plaques composites ont donc été fabriquées, et ont été testées sur le même banc d'essai que celui présenté dans le chapitre 5.

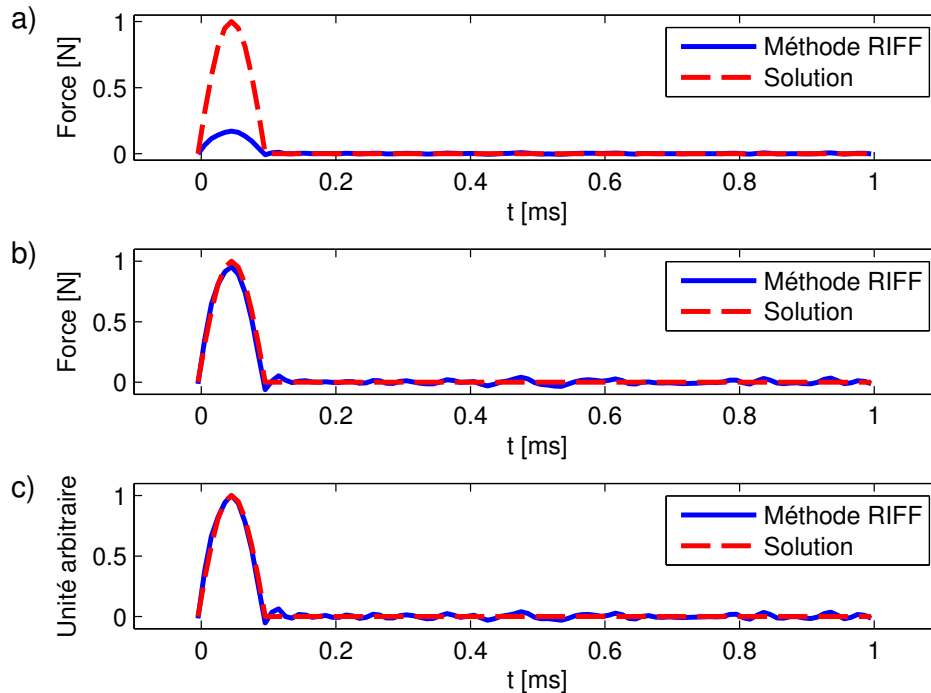


Figure 6.7 Excitation estimée par méthode RIFF transitoire comparée à l'excitation utilisée pour calculer la réponse de la plaque. a) Comparaison absolue au point d'impact. b) Comparaison par intégration. c) Comparaison au point d'impact normalisée.

6.4.1 Fabrication des plaques

Les plaques sont rectangulaires de dimension 50×30 cm. Elles sont chacune constituées de 4 plis de tissu pré-imprégné de résine epoxy MTM 49-3 fabriquées par Cytec, d'épaisseur 0,4 mm chacune. Le tissu est constitué de fibres T1000-12K assemblées dans un satin 5HS comportant 50% des fibres à 0 degré, et 50% des fibres à 90 degrés. Les feuilles sont toutes empilées suivant la même orientation. La première plaque est simplement constituée des plis de carbone, tandis que lors de la préparation de la seconde plaque, deux feuilles de silicone ont été insérées entre le deuxième et troisième pli (voir figure 6.9). L'une des feuilles de silicone fait 0,2 mm d'épaisseur, et l'autre fait 0,4 mm. Ces inclusions servent à modéliser des défauts dans la plaque. Pour la polymérisation, les plaques sont placées sur un support en aluminium, puis placées dans un film servant à mettre sous vide la pièce (voir figure 6.8). La plaque est ensuite placée dans un four programmable qui permet de faire monter la température à 200°C par paliers de 30°C . Après une cuisson de 2 heures, la pièce est sortie du four et démoulée du support en aluminium une fois refroidie.



Figure 6.8 Mise au four de la plaque en carbone. Le système de mise sous vide est constitué d'un film plastique et de différents tissus permettant l'absorption de l'excédent de résine et le démoulage, ainsi que d'une pompe à vide raccordée au volume d'air enfermé dans le sac.



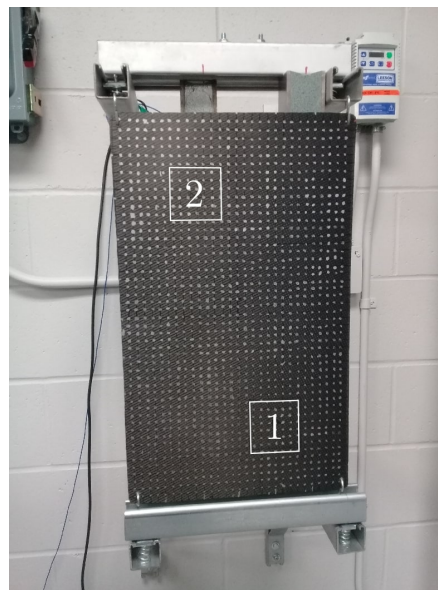
Figure 6.9 Fabrication de la plaque comportant des inclusions. La photo représente les deux feuilles de silicone posés sur le second pli, avant que les autres plis soient empilés.

6.4.2 Mesure et détection de défauts

Les plaques sont montées sur le banc d'essai décrit au chapitre 5. La figure 6.10 montre les positions des inclusions insérées dans les plaques, ainsi que la position d'une masse de 23 g collée à la plaque fabriquée sans feuille de silicone. La procédure de mesure et le recalage de phase des signaux sont effectués, puis pour chaque position de la grille de mesure, le signal temporel mesuré par le vibromètre est intégré pour obtenir le déplacement correspondant.



(a) Plaque comportant une masse ajoutée.



(b) Plaque comportant des inclusions viscoélastiques.

Figure 6.10 Vue de face du montage. Le cercle blanc représente la position de la masse collée sur la face arrière de la plaque. Le carré 1 représente la zone où l'inclusion est d'épaisseur 0,2 mm, le carré 2 représente celle où l'inclusion est d'épaisseur 0,4 mm.

Les figures 6.11a et 6.11c représentent les champs de vitesse mesurés sur les deux plaques à un instant donné. Ces deux champs sont quasiment identiques, ce qui prouve que les conditions expérimentales sont proches et que les défauts introduits ne perturbent pas de façon visible le champ vibratoire des plaques. On observe que sur la première plaque, les fronts d'onde réfléchis ont une amplitude plus faible que sur la seconde plaque : cela est probablement dû au fait que l'empilement des plis (effectué à la main) n'est pas parfait, ce qui modifie légèrement la condition de réflexion au bord de la plaque. En observant les fronts d'onde, on voit clairement que ceux-ci se propagent vite selon les directions des axes x et y , qui correspondent à l'orientation des fibres. Ils se propagent légèrement plus lentement selon les autres directions, car la rigidité effective de la plaque dans cette direction est moindre. L'anisotropie du problème est moins importante que lors de l'étude numérique, mais elle reste encore visible et ne peut pas être négligée. Les figures 6.11b et 6.11d représentent les champs de déplacement correspondants. L'intégration se fait sans problème, même si l'intégration du bruit cause de petites perturbations dans le cas de la plaque comportant une masse ajoutée. Ces perturbations ne posent pas réellement de problème car elles sont de faible amplitude et sont donc filtrées efficacement lors de la régularisation.

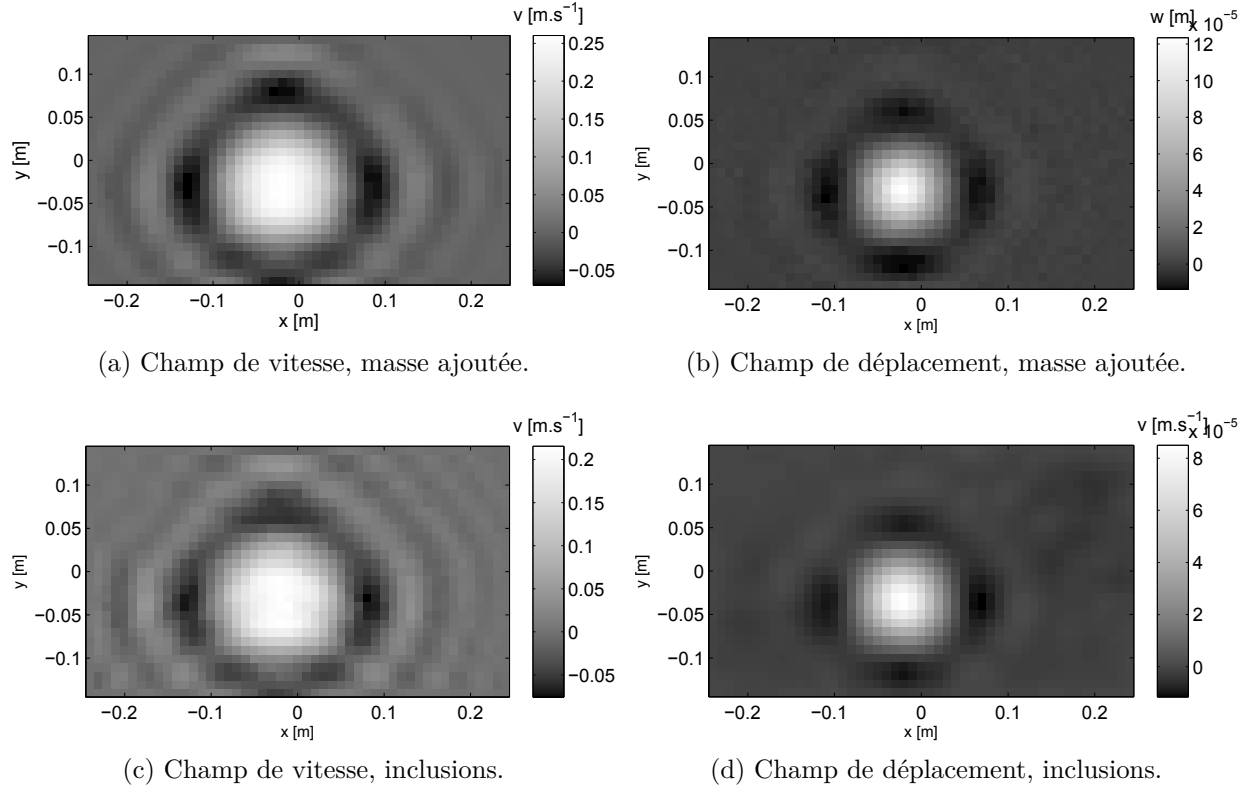


Figure 6.11 Champs de vitesse (a et c) et de déplacement (b et d) des deux plaques, à $t = 0,5$ ms après l'impact. La plaque comportant une masse est représentée sur les figures a et b, et la plaque comportant les inclusions sur les figures c et d.

Les résidus obtenus après application de la méthode RIFF transitoire aux deux jeux de données sont présentés sur la figure 6.12. Pour plus de clarté, les deux cartes de valeurs RMS du résidu sont tracées à la même échelle. La masse ajoutée est détectée sans difficulté : sur la zone comportant le défaut, la valeur RMS du résidu est en moyenne cinq fois supérieure à celle en dehors du défaut. Comme indiqué dans la partie numérique de ce chapitre, la taille du défaut est cependant légèrement sur-estimée, car idéalement, seulement les quatre pixels situés sur le défaut devraient ressortir. Au contraire, les deux inclusions ne sont pas rendues visibles. Ce cas illustre les limites de l'efficacité de la méthode développée dans cette maîtrise. Ici, la matrice de rigidité est très légèrement modifiée par la surépaisseur causée par les inclusions. En dehors des zones 1 et 2, la matrice de flexion de la plaque est :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 24,5 & 0,07 & 0 \\ 0,07 & 23,9 & 0 \\ 0 & 0 & 1,3 \end{bmatrix} \text{ N.m} \quad (6.13)$$

Dans la zone 1, la surépaisseur du silicone écarte les plis de la fibre neutre, la plaque est donc rigidifiée, et la matrice de flexion locale est :

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 34,9 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 34,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,8 \end{bmatrix} \text{ N.m} \quad (6.14)$$

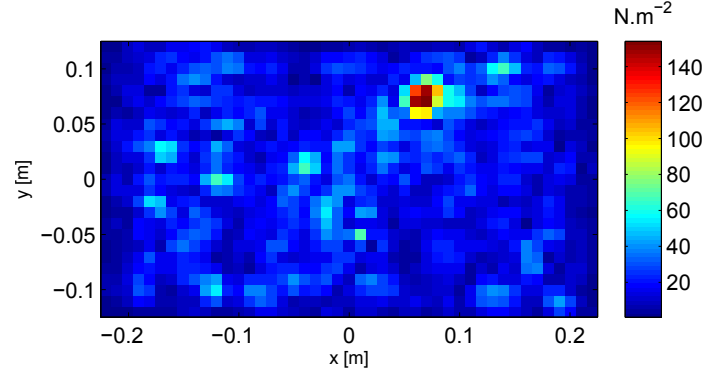
Dans la zone 2, la surépaisseur est plus importante, et la matrice de flexion diffère encore plus de la matrice originale :

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 47,6 & 0,14 & 0 \\ 0,14 & 47,2 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix} \text{ N.m} \quad (6.15)$$

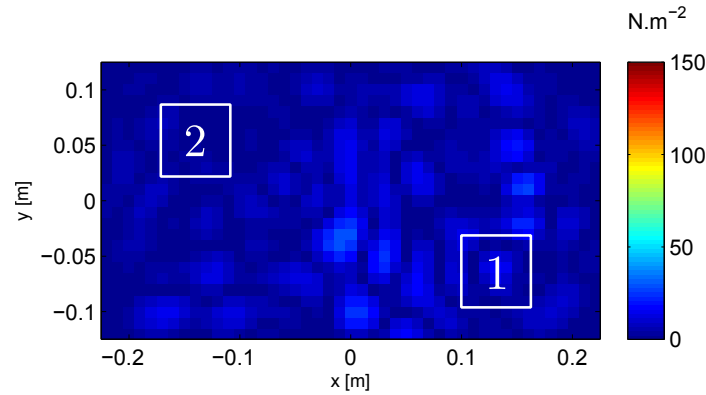
Ce raisonnement simple ne tient pas compte du fait qu'à l'intérieur du stratifié, l'adhérence interlaminaire peut être compromise par la présence du silicone, ce qui peut encore modifier légèrement les matrices \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 . Malgré la méconnaissance des matrices de rigidité locales sur les zones 1 et 2, on peut tout de même conclure en termes d'ordre de grandeur : la méthode proposée ne permet pas, sur un jeu de données expérimentales, de détecter une variation locale de la matrice de flexion d'un facteur 2 (voir figure 6.12b).

6.5 Conclusion partielle

Ce chapitre a permis de présenter l'extension de la méthode RIFF transitoire aux structures composites. Ses performances pour la détection de défauts ont été évaluées sur un cas numérique, puis sur deux études expérimentales. Les identifications de masses ajoutées et d'inhomogénéités effectuées dans ce chapitre sont une preuve de concept qui valide l'approche choisie. De plus, il en ressort qu'en supposant que le jeu de données d'entrée est mesuré avec suffisamment de précision, il est possible de déterminer la forme et la taille des défauts, ainsi que leur sévérité en regardant la valeur RMS du résidu sur le défaut. La méthode de régularisation de Tikhonov semble être une approche convenant à la régularisation du problème, et les méthodes classiques d'optimisation du paramètre de régularisation semblent être suffisamment robustes pour éviter à l'utilisateur de le choisir manuellement. Si l'utilisation de la méthode RIFF transitoire fonctionne parfaitement sur des cas numériques, l'application expérimentale de ce chapitre démontre que lorsque l'acquisition du déplacement est imparfaite, cette méthode ne peut être appliquée que pour détecter des défauts qui apportent une forte modification locale de la structure.



(a) Valeur RMS du résidu, masse ajoutée.



(b) Valeur RMS du résidu, inclusions.

Figure 6.12 Cartes en valeur RMS du résidu obtenu après application de la méthode RIFF transitoire. Ces valeurs sont calculées sur les pas de temps après l'impact (de $t = 0,5$ ms à $t = 10$ ms).

Cet écart entre les observations numériques et expérimentales est dû à la manière dont est modélisé le bruit de mesure. Lorsque celui-ci peut être modélisé par un bruit blanc spatialement et temporellement décorrélé, il se traduit par des composantes hautes fréquences qui sont efficacement filtrées lors du processus de régularisation. En réalité, cette manière très simple de modéliser les erreurs de mesure ne permet pas toujours de prendre en compte les phénomènes qui détériorent le signal d'entrée. Par exemple, une erreur aléatoire sur le positionnement du laser est efficacement prise en compte par cette modélisation. Au contraire, une répétabilité de l'impact imparfaite (qui pourrait être causée par des jeux dans le système de balancier du marteau d'impact, ou à une petite variabilité sur le relâchement du marteau par l'électro-aimant), une imprécision sur le phasage des signaux, ou une erreur dans la modélisation de la plaque ne peuvent certainement pas être pris en compte comme la contribution d'un bruit blanc Gaussien. Dans ce cas, le filtre de régularisation est nécessaire, mais pas suffisant pour obtenir une solution parfaite.

CHAPITRE 7 DISCUSSION GÉNÉRALE

7.1 Introduction

On considère maintenant l'utilisation de la méthode RIFF transitoire sur un jeu de données obtenu par holographie acoustique. Dans le chapitre 4, il a été montré que pour la reconstruction du champ de vitesse normale d'une source, le formalisme TSD-NAH est plus précis que les autres techniques d'holographie de l'état de l'art, mais que les erreurs de reconstruction sont inévitables, même lorsque la distance de rétro-propagation est faible et que le SNR est excellent. Nous avons également vu dans les chapitres 5 et 6 que la sensibilité de la détection est limitée et qu'il est parfois difficile de discerner si un résidu non nul est causé par l'imprécision de la mesure ou par un léger défaut.

Le but de ce chapitre est donc de présenter un outil permettant d'estimer le niveau d'incertitude sur le résidu calculé. Un tel outil permettrait de jauger la confiance que l'on peut avoir dans le résultat, et pourrait servir de critère de décision pour la tâche de détection de défauts. On se propose donc d'adopter le formalisme Bayésien initialement introduit par Zhang *et al.* [67] pour résoudre notre problème de détection de défauts. En particulier, l'implémentation proposée par Faure *et al.* [68] est adaptée au cas transitoire.

La première partie de ce chapitre s'attache donc à expliquer comment cette méthode permet de propager les incertitudes générées par l'holographie acoustique jusqu'au résidu calculé par la méthode RIFF. Dans un second temps, la méthode proposée est appliquée à plusieurs hologrammes rétro-propagés à partir du champ de pression émis par une plaque de plexiglass comportant une inclusion. L'interprétation des intervalles de crédibilité calculés par la méthode de Monte-Carlo est enfin appliquée à la détection de l'inclusion.

7.2 Cadre théorique

7.2.1 Formalisme Bayésien standard

Considérons le modèle sur lequel est basée la méthode RIFF transitoire :

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{f} + \mathbf{n} \quad (7.1)$$

où \mathbf{w} est le déplacement mesuré, \mathbf{C} est la matrice de convolution (pour alléger la notation, l'indice \mathbf{k} est volontairement omis), \mathbf{f} est le champ de force surfacique que l'on cherche à estimer, et où \mathbf{n} représente le bruit de mesure.

Le cadre théorique Bayésien consiste à considérer toutes les variables connues ou mesurées comme déterministes, et toutes les variables inconnues comme aléatoires. Cela nous permet d'exprimer la fonction de densité de probabilité conditionnelle de \mathbf{f} grâce au théorème de Bayes :

$$[\mathbf{f}|\mathbf{w}] \propto [\mathbf{w}|\mathbf{f}] \times [\mathbf{f}] \quad (7.2)$$

Cette expression est constituée de trois termes pouvant être interprétés différemment :

- $[\mathbf{f}|\mathbf{w}]$ est la probabilité a posteriori. Elle représente la probabilité d'observer \mathbf{f} en ayant mesuré le champ \mathbf{w} , et contient donc toutes les informations nécessaires à l'estimation de \mathbf{f} .
- $[\mathbf{w}|\mathbf{f}]$ est la fonction de vraisemblance. Elle représente la probabilité de mesurer \mathbf{w} , étant donné une excitation \mathbf{f} . Cette fonction sert à représenter les erreurs qui dégradent la mesure. Zhang *et al.* montrent qu'elle peut également représenter des erreurs de modèle sur \mathbf{C} [67], ce qui permet de prendre en compte une connaissance imprécise des paramètres matériaux de la plaque, par exemple.
- $[\mathbf{f}]$ est la probabilité à priori de \mathbf{f} . Elle contient les informations que l'on se donne sur \mathbf{f} avant d'effectuer la mesure du déplacement.

7.2.1.1 Choix de la fonction de vraisemblance

Nous avons vu que la fonction de vraisemblance permet de prendre en compte l'effet du bruit de mesure. Nous choisissons de modéliser ce bruit \mathbf{n} comme une variable Gaussienne de moyenne nulle et de matrice de précision $\tau_n^{-1}\mathbf{I}$, où τ_n est l'inverse de la variance, et \mathbf{I} est la matrice identité :

$$[\mathbf{n}] = \mathcal{N}(\mathbf{n}; \mathbf{0}, \tau_n^{-1}\mathbf{I}) \quad (7.3)$$

avec :

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}; \mu, \Sigma) = \frac{1}{\pi^N |\Sigma|} \exp(-(\mathbf{x} - \mu)^H \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)) \quad (7.4)$$

En prenant en compte les variables déterministes dans la notation, on a donc pour fonction de vraisemblance :

$$[\mathbf{w}|\mathbf{f}, \mathbf{C}, \tau_n] = \mathcal{N}(\mathbf{w}; \mathbf{C}^{-1}\mathbf{f}, \tau_n^{-1}\mathbf{I}) = \left(\frac{\tau_n}{\pi}\right)^N \exp\left(-\tau_n \|\mathbf{w} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{f}\|_2^2\right) \quad (7.5)$$

avec $N = N_x \times N_y \times N_t$ étant le nombre de points de mesure.

7.2.1.2 Choix de la fonction de densité à priori

La répartition de force à priori est également choisie Gaussienne, de moyenne nulle et de matrice de précision $\tau_f^{-1}\mathbf{I}$:

$$[\mathbf{f}|\tau_f] = \mathcal{N}(\mathbf{f}; \mathbf{0}, \tau_f^{-1}\mathbf{I}) = \left(\frac{\tau_f}{\pi}\right)^N \exp\left(-\tau_f \|\mathbf{f}\|_2^2\right) \quad (7.6)$$

Cette fonction à priori est choisie car elle donne peu d'informations sur la source, ce qui est souhaitable lorsqu'aucune caractéristique spécifique n'est attendue.

7.2.1.3 Calcul de la fonction de répartition a posteriori

Le théorème de Bayes permet donc d'exprimer la densité a posteriori comme le produit de deux Gaussiennes. Tous calculs faits, on obtient :

$$[\mathbf{f}|\mathbf{C}, \mathbf{w}, \tau_n, \tau_f] \propto [\mathbf{f}|\tau_f] \times [\mathbf{w}|\mathbf{C}, \mathbf{f}, \tau_n] \propto \mathcal{N}(\mathbf{f}; \mu_{\mathbf{f}}, \Sigma_{\mathbf{f}}) \quad (7.7)$$

avec :

$$\Sigma_{\mathbf{f}} = (\mathbf{C}^{-H}\mathbf{C}^{-1}\tau_n + \tau_f\mathbf{I})^{-1} \quad (7.8)$$

et :

$$\mu_{\mathbf{f}} = \Sigma_{\mathbf{f}}\mathbf{C}^{-H}\tau_n\mathbf{w} \quad (7.9)$$

Remarquons qu'avec ce choix de fonctions de vraisemblance et d'à priori, l'approche est équivalente à celle présentée dans les deux chapitres précédents. En effet, le maximum de la fonction a posteriori (noté MAP en indice) correspond à la solution obtenue par la méthode présentée aux chapitres 5 et 6, avec pour paramètre de régularisation $\lambda = \frac{\tau_f}{\tau_n}$ qui représente le ratio signal sur bruit :

$$\mathbf{f}_{MAP} = (\mathbf{I} + \lambda\mathbf{C}\mathbf{C}^H)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{w} \quad (7.10)$$

7.2.2 Formalisme Bayésien étendu

Le formalisme Bayésien standard permet de résoudre le problème inverse à condition de connaître τ_f et τ_n . Pour estimer ces paramètres, la stratégie adoptée par Faure *et al.* consiste à considérer ces paramètres de précision comme aléatoires, et à échantillonner la probabilité jointe $[\mathbf{f}, \tau_n, \tau_f|\mathbf{w}, \mathbf{C}]$ plutôt que $[\mathbf{f}|\tau_n, \tau_f, \mathbf{w}, \mathbf{C}]$. Un tel échantillonnage permet non seulement

de reconstituer \mathbf{f}_{MAP} , $\tau_{f,MAP}$, et $\tau_{n,MAP}$, mais aussi d'obtenir les histogrammes représentant la répartition de ces variables aléatoires, ainsi que les intervalles de crédibilité qui en découlent.

7.2.2.1 Choix de l'algorithme d'échantillonnage

La densité $[\mathbf{f}, \tau_n, \tau_f | \mathbf{w}, \mathbf{C}]$ ne s'exprime cependant pas simplement, il est donc impossible d'effectuer directement des tirages à partir des fonctions implémentées dans les bibliothèques de Matlab ou Python, par exemple. La solution consiste à appliquer une méthode de Monte-Carlo par chaîne de Markov (MCMC). L'objectif est de générer une suite de vecteurs $(\mathbf{f}_{(i)}, \tau_{n(i)}, \tau_{f(i)})$ dont la distribution suit la loi de densité $[\mathbf{f}, \tau_n, \tau_f | \mathbf{w}, \mathbf{C}]$. À chaque pas, l'échantillon $(\mathbf{f}_{(i)}, \tau_{n(i)}, \tau_{f(i)})$ est généré aléatoirement à partir de $(\mathbf{f}_{(i-1)}, \tau_{n(i-1)}, \tau_{f(i-1)})$, d'où le terme de chaîne.

Lorsque le nombre de dimensions est élevé (c'est notre cas), on utilise un type d'algorithme MCMC appelé algorithme de Metropolis-Hastings. Celui-ci peut être rendu encore plus efficace si les lois conditionnelles de chacune des variables aléatoires sont faciles à échantillonner. Dans ce cas, on utilise en particulier l'échantillonneur de Gibbs. Pour cela, il faut donc pouvoir générer aléatoirement des échantillons suivant les lois :

$$[\mathbf{f} | \mathbf{w}, \mathbf{C}, \tau_f, \tau_n], \quad (7.11)$$

$$[\tau_n | \mathbf{f}, \mathbf{w}, \mathbf{C}, \tau_f], \quad (7.12)$$

$$[\tau_f | \mathbf{f}, \mathbf{w}, \mathbf{C}, \tau_n]. \quad (7.13)$$

La loi (7.11) a déjà été exprimée dans la sous-section précédente, et il s'agit d'une loi Gaussienne, dont il est facile d'obtenir des tirages. Les lois (7.12) et (7.13) doivent aussi être choisies judicieusement pour pouvoir être tirées de lois simples.

7.2.2.2 Expression des probabilités conditionnelles de τ_n et τ_f

Pour exprimer les probabilités conditionnelles $[\tau_n | \mathbf{f}, \mathbf{w}, \mathbf{C}, \tau_f]$ et $[\tau_f | \mathbf{f}, \mathbf{w}, \mathbf{C}, \tau_n]$, Faure *et al.* utilisent encore le théorème de Bayes :

$$[\tau_n | \mathbf{f}, \mathbf{w}, \mathbf{C}, \tau_f] \propto [\mathbf{w} | \mathbf{f}, \mathbf{C}, \tau_n] \times [\tau_n] \quad (7.14)$$

$$[\tau_f | \mathbf{f}, \mathbf{w}, \mathbf{C}, \tau_n] \propto [\mathbf{f} | \tau_f] \times [\tau_f] \quad (7.15)$$

Les probabilités à priori de τ_n et τ_f sont choisies de manière à ce que les probabilités a posteriori soient faciles à échantillonner. Faure *et al.* utilisent des lois Gamma pour $[\tau_n]$ et

$[\tau_f]$, de manière à ce que $[\tau_n|\mathbf{f}, \mathbf{w}, \mathbf{C}, \tau_f]$ et $[\tau_f|\mathbf{f}, \mathbf{w}, \mathbf{C}, \tau_n]$ soient elles aussi des lois Gamma. Ces lois Gamma à priori sont chacune définie par deux hyper-paramètres k_n , θ_n , k_f , et θ_f fixés par l'utilisateur :

$$[\tau_n] = \mathcal{G}(\tau_n; k_n, \theta_n) = \frac{\tau_n^{k_n-1}}{\Gamma(k_n)\theta_n^{k_n}} \exp(-\frac{\tau_n}{\theta_n}) \quad (7.16)$$

$$[\tau_f] = \mathcal{G}(\tau_f; k_f, \theta_f) = \frac{\tau_f^{k_f-1}}{\Gamma(k_f)\theta_f^{k_f}} \exp(-\frac{\tau_f}{\theta_f}) \quad (7.17)$$

où Γ est la fonction Gamma.

On a donc :

$$\begin{aligned} [\tau_n|\mathbf{f}, \mathbf{w}, \mathbf{C}, \tau_f] &\propto \mathcal{G}(\tau_n; k_n, \theta_n) \mathcal{N}(\mathbf{w}; \mathbf{C}^{-1}\mathbf{f}, \tau_n^{-1}\mathbf{I}) \\ &\propto \mathcal{G}(\tau_n; k_n + N, (\theta_n^{-1} + \|\mathbf{w} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{f}\|_2^2)^{-1}) \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} [\tau_f|\mathbf{f}, \mathbf{w}, \mathbf{C}, \tau_n] &\propto \mathcal{G}(\tau_f; k_f, \theta_f) \mathcal{N}(\mathbf{f}; \mathbf{0}, \tau_f^{-1}\mathbf{I}) \\ &\propto \mathcal{G}(\tau_f; k_f + N, (\theta_f^{-1} + \|\mathbf{f}\|_2^2)^{-1}) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Notons que les lois (7.18) et (7.17) dépendent des hyper-paramètres k_n , θ_n , k_f , et θ_f fixés par l'utilisateur. Cette dépendance peut être supprimée en choisissant $k_f = k_n = \theta_n^{-1} = \theta_f^{-1} = 0$. Ces valeurs peuvent être utilisées car les lois à priori (7.16) et (7.17) ne sont jamais utilisées au cours de l'algorithme. De cette manière, la méthode reste compatible avec l'objectif spécifique (4). Le graphe hiérarchique 7.1 résume la dépendance des variables utilisées dans le problème d'identification inverse de défauts.

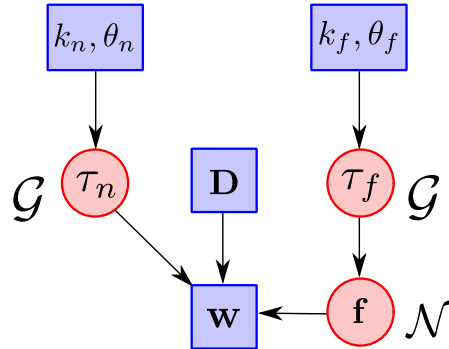


Figure 7.1 Graphe hiérarchique représentant la dépendance des variables du problème. Les variables dans les rectangles bleus sont les variables déterministes (mesurées ou fixées par l'utilisateur), et les variables dans les cercles rouges sont les variables aléatoires dont on a besoin d'échantillonner la probabilité conditionnelle.

7.2.2.3 Algorithme détaillé et interprétation des résultats

Les étapes pour implémenter la méthode de Monte-Carlo pour le problème d'identification de défauts sont présentées dans l'algorithme 1.

Algorithme 1 Échantillonneur de Gibbs

Initialisation :

$$\lambda_{(0)} \leftarrow \text{mediane}(\lambda_{Lcurve}, \lambda_{GCV}, \lambda_{MAP})$$

$$\mathbf{f}_{(0)} \leftarrow \mathbf{f}_{MAP}(\lambda_{(0)})$$

$$\tau_{f(0)} \leftarrow \|\mathbf{f}_{(0)}\|_2^2$$

$$\tau_{n(0)} \leftarrow \|\mathbf{w} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{f}_{(0)}\|_2^2$$

$$i \leftarrow 0$$

while $i < i_{max}$ **do**

$$\lambda_{(i+1)} \leftarrow \frac{\tau_{f(i)}}{\tau_{n(i)}}$$

$$\mathbf{f}_{(i+1)} \leftarrow \text{échantillonné de } \mathcal{N}(\mathbf{f}; \mu_{\mathbf{f}}, \Sigma_{\mathbf{f}})$$

$$\tau_{n(i+1)} \leftarrow \text{échantillonné de } \mathcal{G}(\tau_n; k_n + N, (\theta_n^{-1} + \|\mathbf{w} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{f}_{(i+1)}\|_2^2)^{-1})$$

$$\tau_{f(i+1)} \leftarrow \text{échantillonné de } \mathcal{G}(\tau_f; k_f + N, (\theta_f^{-1} + \|\mathbf{f}_{(i+1)}\|_2^2)^{-1})$$

if $i > i_{conv}$ **then**

Enregistrer $(\mathbf{f}, \tau_n, \tau_f)_{(i+1)}$

end if

$$i \leftarrow i + 1$$

end while

Pour rendre l'algorithme efficace, tous les calculs sont menés dans le domaine de Fourier, et la circularisation de l'opérateur \mathbf{C} de convolution est utilisée, contrairement à la méthode de Faure *et al.* qui se base sur la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{C} . Pour l'initialisation de l'algorithme et le tirage des probabilités conditionnelles, on utilise donc les relations :

$$\mathbf{f}_{MAP}(\lambda_{(0)}) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{1 + \lambda_{(0)} |\mathcal{F}(\mathbf{k})|^2} \mathcal{F}(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{F}(\mathbf{w}) \right] \quad (7.20)$$

$$\mathbf{w} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{f}_{(i)} = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\lambda_{(i)} |\mathcal{F}(\mathbf{k})|^2}{1 + \lambda_{(i)} |\mathcal{F}(\mathbf{k})|^2} \cdot \mathcal{F}(\mathbf{w}) \right] \quad (7.21)$$

$$\mathbf{f}_{(i+1)} = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{1 + \lambda_{(i)} |\mathcal{F}(\mathbf{k})|^2} \mathcal{F}(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{F}(\mathbf{w}) + \sqrt{\frac{|\mathcal{F}(\mathbf{k})|^2}{\tau_{f(i)} |\mathcal{F}(\mathbf{k})|^2 + \tau_{n(i)}}} \cdot \mathbf{n} \right] \quad (7.22)$$

où \mathbf{n} est tiré de la loi $\mathcal{N}(\mathbf{n}; \mathbf{0}, \mathbf{I})$.

Pour obtenir des échantillons $(\mathbf{f}, \tau_n, \tau_f)$ suivant la loi $[\mathbf{f}, \tau_n, \tau_f | \mathbf{w}, \mathbf{C}]$, il faut effectuer suffisamment d'itérations pour que la chaîne de Markov converge. Une fois la chaîne convergée, N_e échantillons sont gardés en mémoire, puis leur distribution – riche en informations – est analysée. Chaque variable u (pouvant correspondre à τ_n , τ_f ou l'une des coordonnées de \mathbf{f}), peut être estimée par sa valeur moyenne :

$$u_{moy} = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} u_{(i)} \quad (7.23)$$

Une fois les $u_{(i)}$ triés par ordre croissant, on a également accès aux intervalles de crédibilité à $100(1 - 2p)\%$, pour tout $p \in [0, \frac{1}{2}]$. Si $u_{(i)}$ indique le $i^{\text{ième}}$ plus petit échantillon, l'intervalle de crédibilité à $100(1 - 2p)\%$ est $[u_{(p \times N_e)}, u_{((1-p) \times N_e)}]$. L'intervalle considéré sera d'autant plus large que $100(1 - 2p)$ est proche de 100% , ce qui est naturel car l'intervalle de crédibilité englobe les $100(1 - 2p)\%$ observations les plus probables. Le terme "intervalle de crédibilité" est utilisé à dessein, et ne doit pas être confondu avec un "intervalle de confiance", qui a une interprétation analogue dans l'approche fréquentiste des statistiques [96]. La médiane $u_{med} = u_{(0,5 \times N_e)}$ peut également être considérée pour estimer la solution. L'histogramme de la distribution de chaque variable u est aussi accessible, ce qui permet d'avoir une idée de la valeur du maximum a posteriori u_{MAP} .

La méthode Bayésienne nous fournit donc une grande quantité d'informations sur les variables estimées. Dans l'optique d'utiliser le résidu de la méthode RIFF pour décider de la présence ou de l'absence de défaut dans la structure, les informations les plus utiles sont les intervalles de crédibilité. En effet, nous avons vu que le résidu n'est jamais parfaitement nul partout où il devrait l'être. Cela est lié aux imprécisions de la mesure du champ vibratoire. À défaut de pouvoir distinguer la cause de la non-nullité du résidu, il est nécessaire d'estimer la probabilité qu'il y ait réellement un défaut sur la structure. La règle proposée est donc la suivante : si l'intervalle de crédibilité à $s\%$ ne contient pas 0, alors la probabilité d'avoir un défaut sur la zone sélectionnée est supérieure à $s\%$. Lorsque s se rapproche de 100% , le défaut est identifié sans ambiguïté. Lorsque s est plus faible, le résultat est moins fiable.

7.3 Application expérimentale

Dans cette section, le but est de montrer que l'algorithme de Monte-Carlo présenté permet l'estimation de la solution ainsi que la détection des défauts. L'objectif est également de prouver l'apport de cette méthode lorsque le jeu de données d'entrée est obtenu par holographie acoustique et de déterminer quelles distances de rétro-propagation permettent une inspection

efficace de la structure.

7.3.1 Calcul du champ de pression

Pour s'assurer d'obtenir des ordres de grandeur réalistes, il est nécessaire de mener cette étude sur un jeu de données issu de données expérimentales. La démarche adoptée consiste donc à mesurer le champ de vitesse normale d'une plaque de plexiglass comportant un défaut, en utilisant un vibromètre laser. Ici, le défaut est une inclusion métallique encastrée dans la plaque, visible à la figure 7.2.



Figure 7.2 Montage utilisé pour l'étude. Une plaque en plexiglass comportant une inclusion métallique est placée sur le banc d'essai utilisé aux chapitres 5 et 6.

À partir de la vitesse de la plaque, le champ de pression peut être calculé dans tout l'espace $z > 0$ où la plaque rayonne. La pression est donc calculée sur différents plans parallèles à la plaque, situés à une distance $z = d$ variable (voir figure 7.3). Il a été choisi de calculer ces champs de pression plutôt que de les mesurer individuellement à l'aide d'une antenne de microphones car une mesure asynchrone du champ de pression nécessite plusieurs heures de manipulation. De plus, il est très difficile de contrôler parfaitement l'excitation appliquée sur la plaque, car elle est extrêmement sensible à la hauteur de chute de l'impacteur. Il aurait donc été très difficile de reproduire exactement la même excitation après chaque manipulation du montage visant à changer la distance d .

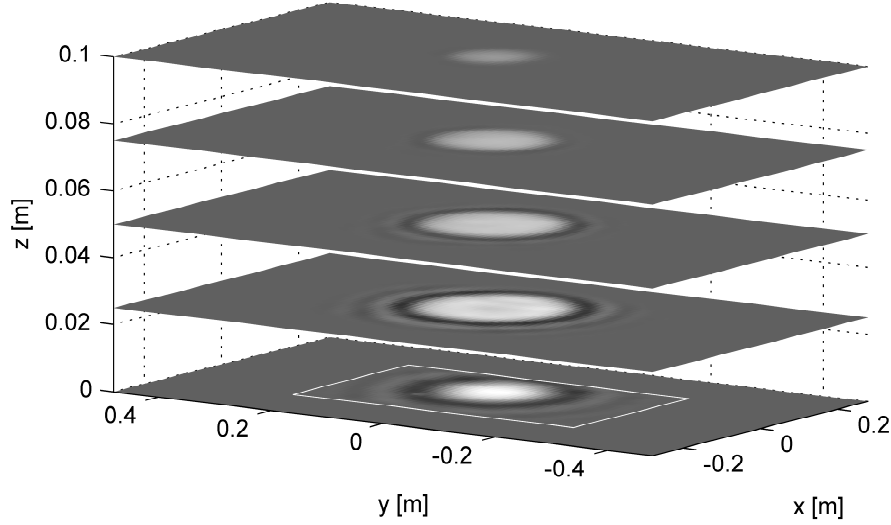


Figure 7.3 Pression calculée sur différents plans parallèles à la source, à $t = 0,5$ ms après l'impact. La vitesse mesurée par vibrométrie laser est représentée sur la surface $d = 0$.

Étant donné que l'on connaît la vitesse sur la source, pour connaître le champ de pression sur le plan de calcul, nous utilisons l'intégrale de Rayleigh décrite au chapitre 2, qui se ramène à une convolution entre le champ de vitesse et la fonction de Green. Pour effectuer les calculs efficacement, on s'appuie sur le formalisme TSD-NAH développé au chapitre 4 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_g \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.24)$$

où \mathbf{v} est le champ de pression mesuré par vibrométrie laser, \mathbf{C}_g est l'opérateur de convolution circularisé, et où \mathbf{p} est la pression sur le plan parallèle à la source. $\tilde{\mathbf{p}}$ représente les échantillons du champ de pression correspondant à des points situés en dehors de la fenêtre de mesure du champ de vitesse. Comme pour le problème inverse, ce formalisme peut être efficacement implémenté en utilisant la transformée de Fourier rapide, comme indiqué sur le schéma 7.4. Lorsque la source est de taille finie, cette implémentation permet une reconstruction du champ de pression avec une erreur négligeable [35].

7.3.2 Rétro-propagation des données

Dans cette étude, il nous supposons que les conditions expérimentales permettent d'avoir un rapport signal sur bruit de 30 dB sur la mesure de pression, ce qui est réalisable dans une chambre anéchoïque. Le bruit est ajouté au champ de pression, puis l'hologramme du champ de vitesse sur la source est calculé en suivant la procédure présentée au chapitre 4.

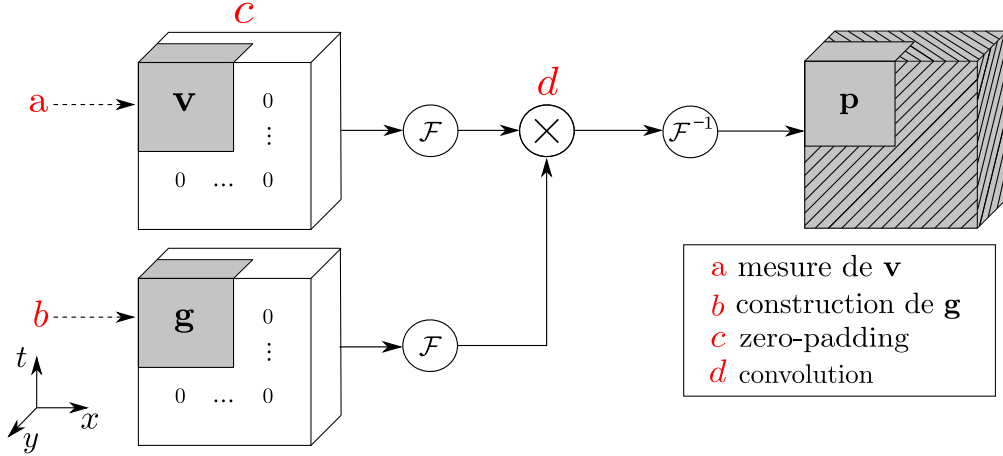


Figure 7.4 Schéma bloc de l'implémentation du problème direct en utilisant le formalisme TSD-NAH.

Pour quantifier le taux d'erreur de reconstruction, nous utilisons les indicateurs φ et M présentés au chapitre 4. Ces indicateurs permettent respectivement de mesurer l'accord de phase et l'écart d'amplitude entre le signal reconstruit et le signal mesuré par vibrométrie, et sont représentés à la figure 7.5 pour chaque distance de rétro-propagation. La zone du défaut correspond systématiquement à des points où la qualité de la reconstruction par holographie acoustique est plus faible qu'ailleurs, surtout pour des distances de rétro-propagation élevées. Ce phénomène est dû au filtre de régularisation qui lisse la perturbation causée par le défaut. De plus, la reconstruction est dégradée sur les bords de la plaque. Il s'agit encore d'un effet du filtre de régularisation. La vitesse à reconstruire est discontinue aux bords de la plaque car elle est toujours nulle en dehors de la plaque. Le filtre de régularisation tend à lisser cette discontinuité, ce qui altère la précision de l'hologramme sur les points voisins du bord de la plaque. Pour des conditions aux limites différentes, cet effet pourrait être d'une importance moindre. Par exemple, la discontinuité de vitesse est supprimée lorsque la plaque est encadrée ou simplement supportée, ce qui permet une reconstruction plus précise sur les bords de la plaque.

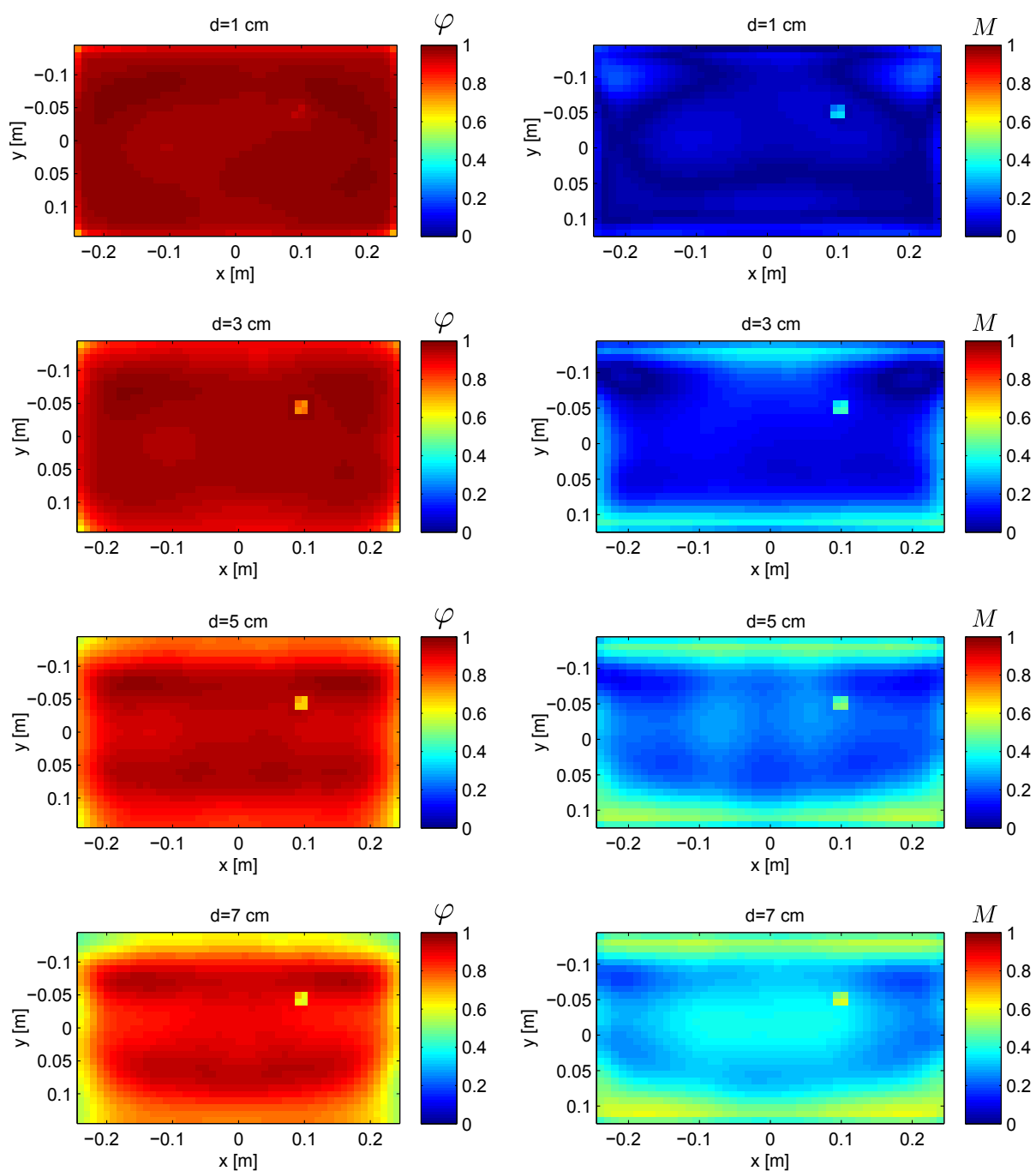


Figure 7.5 Cartes d'erreur de la reconstruction du champ de vitesse. La première colonne représente l'indicateur d'accord de phase φ (un fort accord — se rapprochant de 1 — tend vers le rouge). La seconde colonne indique la répartition de l'erreur de norme M (une erreur faible — se rapprochant de 0 — tend vers le bleu). Chaque ligne correspond à une distance de rétro-propagation donnée : $d = 1, 3, 5, 7$ cm.

7.3.3 Échantillonnage et interprétation

L'algorithme détaillé dans la partie 7.2.2.3 est appliqué sur les jeux de données obtenus. Dans chacun des cas, la convergence de l'algorithme se fait sur une centaine d'itérations, et les échantillons sont enregistrés seulement après convergence de la chaîne de Markov. On peut observer la convergence en regardant l'évolution des paramètres τ_n et τ_f au cours des itérations, comme à la figure 7.6, tracée pour le cas $d = 2$ cm. Sur cette figure, les échantillons tirés avant le trait en pointillé vertical ne sont pas considérés pour l'estimation de la force et des intervalles de crédibilité. La convergence de la chaîne est rapide pour deux raisons. Premièrement, il s'agit de l'intérêt principal de l'échantillonneur de Gibbs par rapport aux autres algorithmes de Monte-Carlo. Deuxièmement, la méthode développée aux chapitres 5 et 6 nous fournit une initialisation proche de l'état stationnaire de la chaîne de Markov. La méthode RIFF classique est donc nécessaire pour pouvoir appliquer l'algorithme de Monte-Carlo : sans une bonne initialisation, la méthode nécessite un nombre d'itérations beaucoup plus élevé, ou l'échantillonnage peut tout simplement ne pas converger.

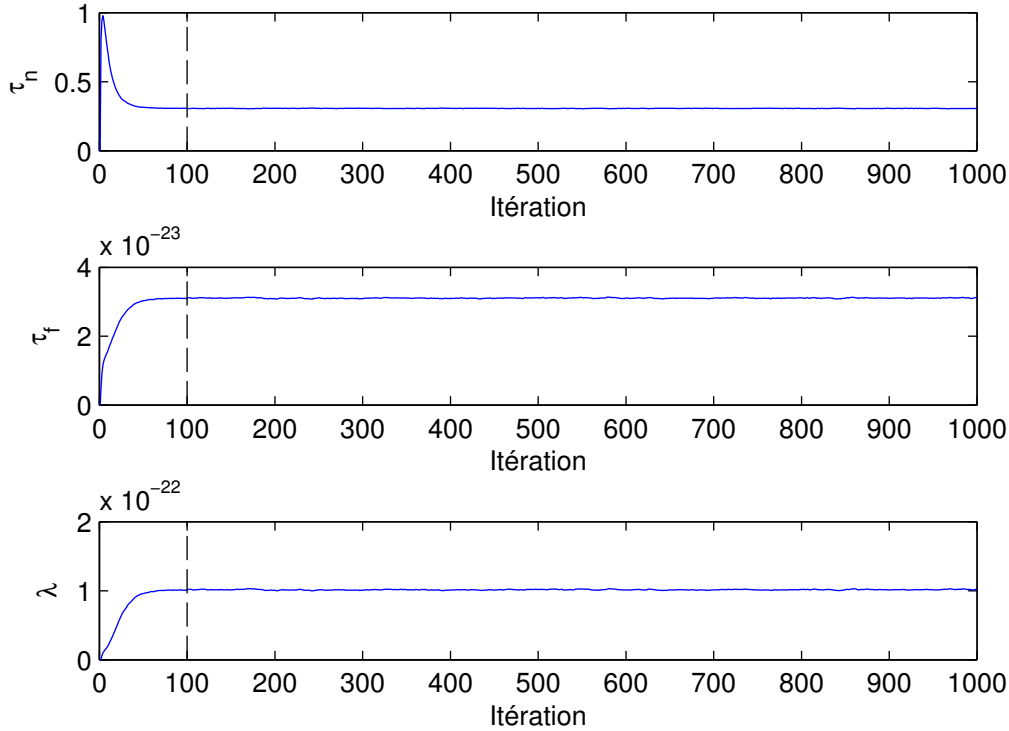


Figure 7.6 Convergence de l'algorithme pour les paramètres τ_n et τ_f , ainsi que le paramètre λ correspondant, pour une distance de rétro-propagation de $d = 2$ cm.

Une fois que la phase de convergence est terminée, il est possible de déterminer la distribution des variables aléatoires. Par exemple, il est possible de calculer les histogrammes des

paramètres τ_n et τ_f pour déterminer leur valeur moyenne et leur variance. Les précisions τ_n et τ_f suivent comme prévu une loi Gamma, comme l'indique la qualité de la régression à la figure 7.7. Il est possible d'estimer le meilleur paramètre de régularisation en prenant le maximum de la distribution de probabilité de λ (ici, $\lambda = 1,015 \times 10^{-22}$, par exemple). Les valeurs de τ_n et τ_n donnent respectivement une estimation de l'amplitude du bruit et de la source.

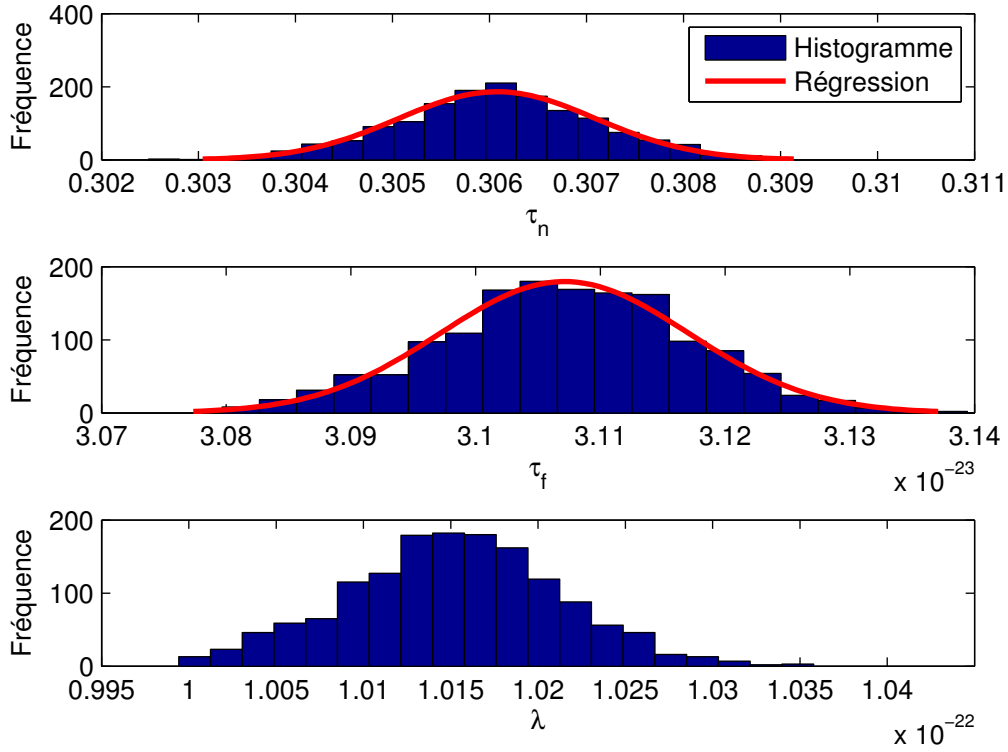


Figure 7.7 Histogrammes des tirages de τ_n et τ_f obtenus, ainsi que des paramètres λ correspondants, pour une distance de rétro-propagation de $d = 2$ cm.

Pour interpréter la distribution du résidu de la méthode RIFF, il est possible de faire une analyse des intervalles de crédibilité. Pour chaque instant, nous obtenons une carte du résidu ainsi que des intervalles de crédibilité associés, comme à la figure 7.8. L'emplacement correspondant au défaut est clairement visible sur la solution. De plus, nous pouvons voir qu'à la position du défaut, l'intervalle de crédibilité à 75% (qui se situe entre les deux nappes en gris foncé à la figure 7.9a) ne contient pas zéro. Dans l'interprétation que nous proposons, cela signifie qu'un défaut est identifié avec une probabilité supérieure à 75%. En revanche, tout le plan $\mathbf{f} = 0$ est contenu dans l'intervalle de crédibilité à 95% (voir figure 7.9b). La fiabilité de la détection est donc inférieure à 95%, si l'on en juge uniquement par cette carte, correspondant à instant $t = 0,186$ ms.

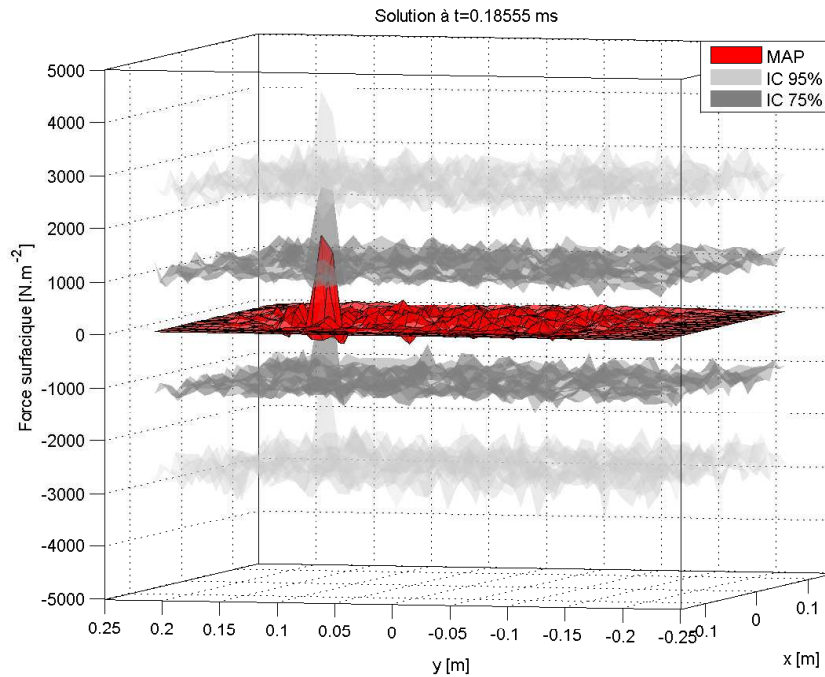
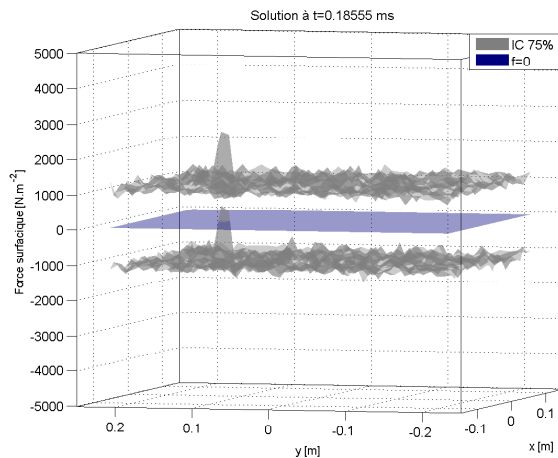
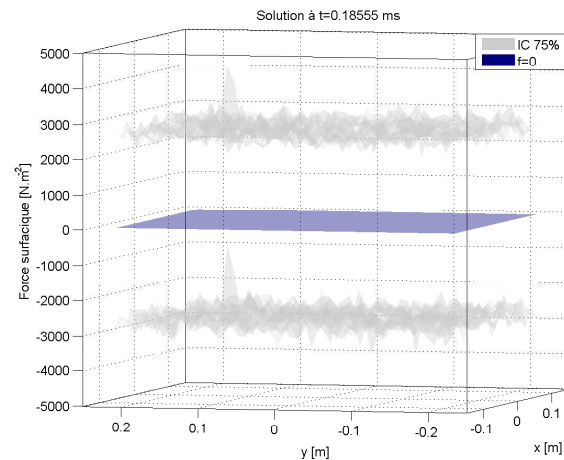


Figure 7.8 Visualisation du résidu dans le domaine spatial, pour $t = 0,186$ ms et une distance de rétro-propagation de $d = 2$ cm. Les nappes transparentes correspondent aux extrémités des intervalles de crédibilité à 75% (gris foncé) et 95% (gris clair), et la nappe rouge correspond au maximum a posteriori.



(a) Intervalle de crédibilité à 75% du résidu.



(b) Intervalle de crédibilité à 95% du résidu.

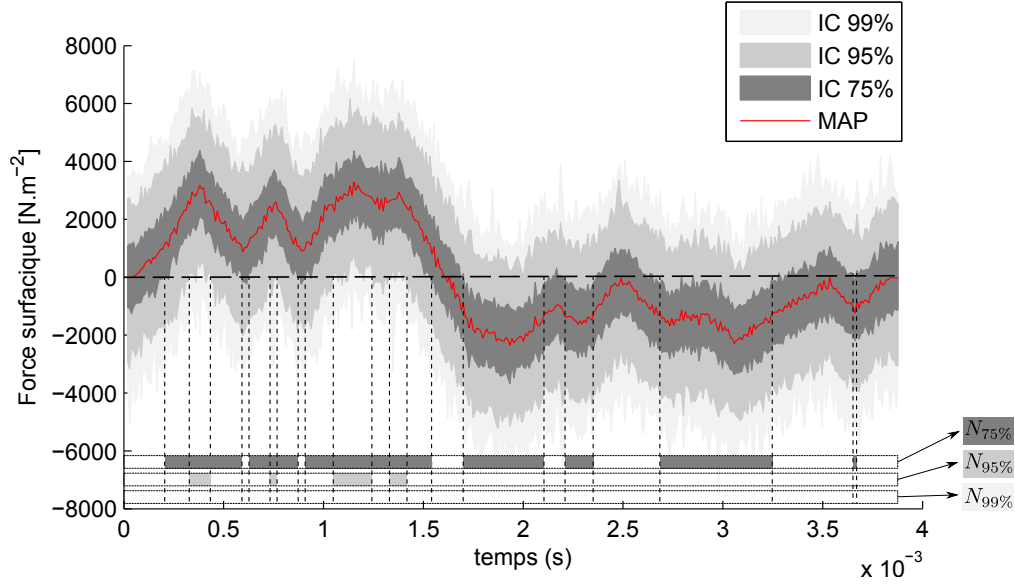
Figure 7.9 Visualisation des intervalles de crédibilité dans le domaine spatial, pour $t = 0.186$ ms et une distance de rétro-propagation de $d = 2$ cm.

Pour décider si la probabilité de détection est effectivement inférieure à 95%, il faut observer le résidu et ses intervalles de crédibilité à tous les instants calculés. Pour cela, il est utile de tracer l'évolution temporelle du résidu sur le défaut, comme à la figure 7.10. À la figure 7.10a, nous pouvons voir que l'axe $f = 0$ est contenu dans l'intervalle de crédibilité à 99%, mais il n'est pas contenu dans les intervalles à 75% et 95% pour certains pas temporels. La confiance que l'on peut accorder à la détection est donc comprise entre 95% et 99%. Sur la figure 7.10b, nous pouvons mener le même raisonnement. Dans ce cas, étant donné que l'axe $f = 0$ est contenu dans tous les intervalles de confiance, nous pouvons en conclure qu'il n'y a pas probablement pas de défaut à cet emplacement, même si le résidu calculé n'est pas rigoureusement nul au cours du temps.

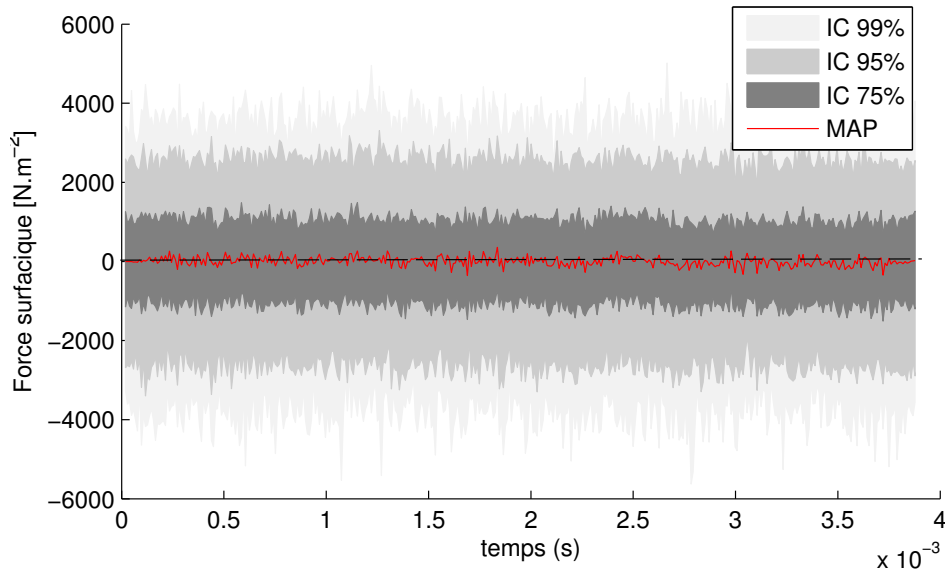
Grâce à cette approche, il est possible avoir une carte des défauts identifiés sur la plaque avec une probabilité $s\%$. Pour chaque position, il suffit par exemple de comptabiliser $N_{s\%}$ le nombre de pas de temps où l'intervalle de crédibilité à $s\%$ ne contient pas zéro. Tous les points où $N_{s\%} > 0$ ont une probabilité supérieure à $s\%$ de correspondre à un défaut. À la figure 7.11, cette carte est calculée pour $p = 75\%$. Pour $p > 75\%$, le nombre de pas de temps comptabilisés serait logiquement plus faible que $N_{75\%}$, car le critère de comptabilisation est plus sélectif. L'indicateur $N_{s\%}$ est donc une fonction décroissante de p . Notons qu'il n'est pas possible de calculer $N_{100\%}$, car cela supposerait de tirer un nombre infini d'échantillons. Cependant, en calculant suffisamment d'échantillons, il est possible de calculer $N_{s\%}$ pour $p \rightarrow 1$.

Contrairement aux cartes RMS calculées aux chapitres 5 et 6, cet indicateur est parfaitement nul pour les positions en dehors de l'inclusion, ce qui achève de valider l'objectif spécifique (3). Il n'y a donc pas besoin de fixer un seuil arbitraire pour servir de critère de décision (comme c'est le cas lorsque l'on travaille sur la valeur RMS du résidu). Avoir besoin d'un tel seuil serait incompatible avec l'objectif spécifique (4). De plus, cet indicateur dépend de la fiabilité souhaitée (exprimée sous la forme d'un pourcentage p) ce qui remplit l'objectif spécifique (7).

Nous avons vu que plus la distance de rétro-propagation est importante, moins la reconstruction de la vitesse normale de la plaque est précise. L'avantage de la méthode d'identification inverse Bayésienne est que cette imprécision est propagée dans les intervalles de crédibilité calculés à la fin de l'échantillonnage. En effet, plus l'hlogramme reconstruit est imprécis, moins la force reconstruite est proche de la solution théorique, qui est sensée être nulle partout, sauf à l'emplacement du défaut. Par conséquent, plus l'hlogramme est impré-



(a) Résidu à la position du défaut.



(b) Résidu en dehors du défaut.

Figure 7.10 Résidus obtenus à la position du défaut, et au centre de la plaque, pour une rétro-propagation de $d = 2$ cm.

cis, plus $\|\mathbf{f}\|_2^2$ est grand, plus le paramètre de forme de $[\tau_f|\mathbf{f}, \mathbf{w}, \mathbf{C}, \tau_n]$ est faible, donc plus τ_f est petit en moyenne. Une faible valeur de τ_f favorise la contribution du bruit à chaque tirage de \mathbf{f} (voir l'équation (7.22)), et engendre des intervalles de crédibilité plus larges, ce qui fait baisser la confiance que l'on peut avoir dans le résultat. Autrement dit, plus l'antenne de microphones est éloignée de la source, moins la confiance accordée au résultat de l'algorithme de détection de défauts est élevée. Ce n'est pas surprenant dans la mesure où on

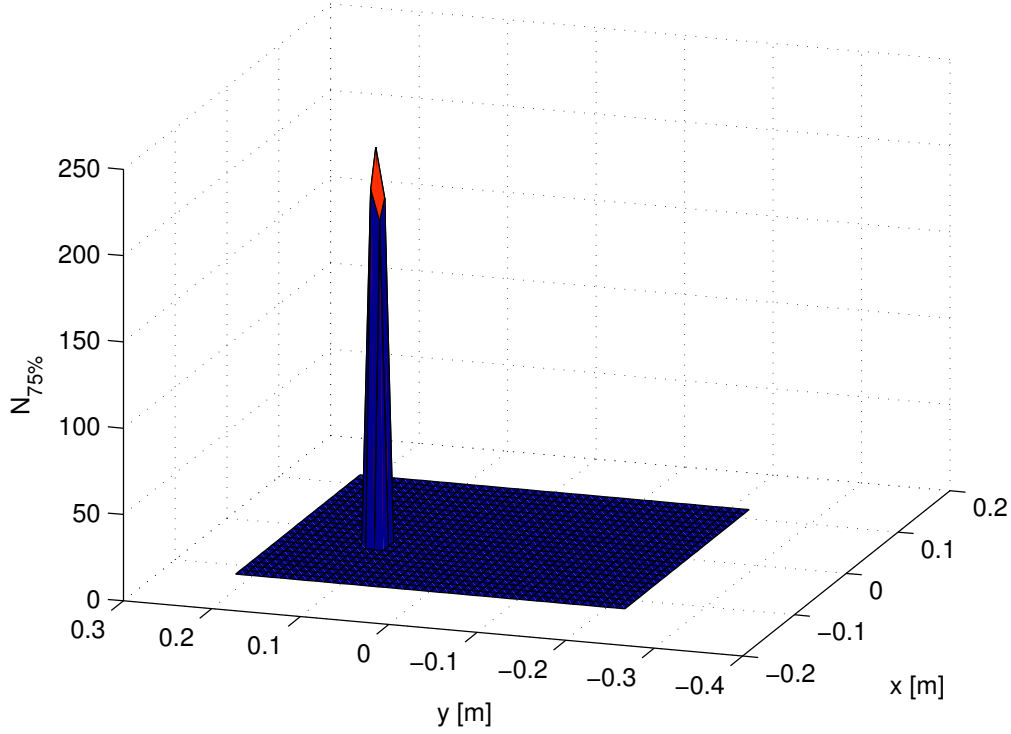


Figure 7.11 Carte de l'indice $N_{75\%}$ pour une rétro-propagation sur $d = 2$ cm.

a vu au chapitre 2 que les petits défauts perturbent surtout le rayonnement acoustique de la plaque dans son champ proche, qui est d'autant plus difficile à reconstruire par holographie acoustique que l'antenne est située loin de la source.

Le tableau 7.1 compile les résultats obtenus avec la méthode proposée sur le cas de la plaque de plexiglass comportant une inclusion. Le défaut est identifié avec succès de manière quasi-certaine pour $d \leq 1$ cm ($d = 0$ correspond au champ obtenu par vibrométrie laser), ce qui confirme le fait que l'holographie acoustique est utilisable pour détecter précisément certains défauts structuraux. Néanmoins, il n'est pas toujours possible de placer l'antenne de microphones aussi près de la structure. Par exemple, pour exciter une structure de grande dimension, l'excitation à appliquer doit être importante, ce qui peut faire saturer certains microphones proches du point d'impact. Dans ces cas, il peut être nécessaire d'éloigner l'antenne de la structure. Le tableau 7.1 nous apprend que cet éloignement se fait au prix d'une perte de fiabilité dans le résultat. La fiabilité reste acceptable jusqu'à $d = 5$ cm. Pour $d \geq 5$ cm, le résidu à la position du défaut est non nul, mais son intervalle de crédibilité à 75% contient zéro. On qualifie ce résultat de faux négatif, puisque l'algorithme ne détecte pas un défaut qui existe bel et bien. D'autre part, il est possible de poursuivre l'analyse en acceptant

des résultats dont l'indice de fiabilité est inférieur à 75%, mais cela engendre des faux positifs. Ces faux positifs correspondent à des points en dehors du défaut où $N_{s\%}$ est non nul, ce qui n'est pas souhaitable.

Tableau 7.1 Tableau des résultats de la méthode. Les X représentent les cas où le défaut est identifié avec succès, et les cases vides correspondent au cas où le défaut n'est pas identifié.

	Intervalle à 99%	Intervalle à 95%	Intervalle à 75%
$d = 0$ cm	X	X	X
$d = 1$ cm	X	X	X
$d = 2$ cm		X	X
$d = 3$ cm			X
$d = 4$ cm			X
$d = 5$ cm			
$d = 6$ cm			
$d = 7$ cm			

7.4 Conclusion partielle

La méthode Bayésienne proposée par Faure *et al.* est ici utilisée pour le cas transitoire. Pour rendre l'implémentation efficace, la circularisation de \mathbf{C} à l'aide de la transformée de Fourier tri-dimensionnelle est utilisée pour simplifier les tirages de \mathbf{f} , τ_n , et τ_f . Il est démontré que le couplage entre méthode RIFF transitoire et NAH est une approche viable pour la détection de défauts, et que le calcul des intervalles de crédibilité permet de prendre du recul sur le résidu calculé en estimant le degré de confiance que l'on peut accorder au résultat. Les intervalles de crédibilité sont en effet d'autant plus larges que les hologrammes utilisés en entrée sont imprécis, ce qui évite de tirer des conclusions trop nettes à partir de jeux de données imparfaits.

Un exemple tiré de données expérimentales a permis de souligner les limitations de cette approche liées à la distance de rétro-propagation : si l'on souhaite maximiser le degré de certitude accordé au résultat, il est nécessaire de placer l'antenne de microphones le plus proche possible de la source.

CHAPITRE 8 CONCLUSION

8.1 Synthèse des travaux

L'objectif général de cette maîtrise est de "développer une méthode permettant la détection de défauts sur des plaques à partir de la mesure de la pression dans le champ proche de la structure". Afin de répondre à cet objectif général et aux objectifs spécifiques qui en découlent, une approche consistant à coupler l'holographie acoustique transitoire en champ proche et la méthode de résolution inverse filtrée fenêtrée a été choisie. La difficulté de cette démarche réside dans le fait qu'il s'agit d'utiliser les résultats issus de la résolution d'un problème inverse (le champ de vitesse de la structure) pour résoudre un second problème inverse.

L'objet de la première partie de ces travaux a donc été de choisir la formulation de l'holographie acoustique à la pointe de l'art dans le but de maximiser la qualité de la reconstruction du champ de vitesse à partir duquel on souhaite détecter les éventuels défauts de la structure. Après l'examen de la littérature, il est apparu que le formalisme TSD-NAH est celui qui correspond le mieux à ce critère, dans le cas du calcul d'hogrammes de pression. Cette formulation s'appuie sur l'inversion d'un opérateur de convolution linéaire, ce qui permet de supprimer les effets de recouvrement. De plus, il s'appuie sur un échantillonnage de la fonction de Green dans le domaine temps-espace, ce qui supprime l'effet de la fuite spectrale. Nous nous sommes donc appliqués à montrer au chapitre 4 que ce formalisme permet aussi une reconstruction efficace et précise du champ de vitesse dans le cas de sources non-stationnaires causales. Cela est illustré sur deux cas numériques. Le premier sert à mettre en évidence les avantages du formalisme TSD par rapport aux autres méthodes de l'état de l'art. Le second sert à quantifier les niveaux d'erreurs de reconstruction sur un cas réaliste. Il est démontré que l'erreur de magnitude et de phase se dégradent rapidement lorsque le plan de mesure s'éloigne du plan de reconstruction. L'applicabilité pratique de cette méthode est quant à elle prouvée à l'aide d'un montage expérimental dans le cas d'une plaque de plexiglass excitée par un impacteur métallique.

La méthode de résolution inverse filtrée fenêtrée a été identifiée comme la meilleure option pour exploiter les résultats obtenus par reconstruction holographique. Elle a donc été adaptée pour traiter des signaux transitoires. La méthode a d'abord été développée pour étudier les structures homogènes et isotropes dans le chapitre 5, puis elle a été étendue dans le chapitre 6 aux structures au cas des matériaux stratifiés. La validation numérique de cette méthode

donne un aperçu théorique des possibilités de détection de défauts offertes par cette méthode. Sa validation expérimentale sur des plaques homogènes ou en matériaux stratifiés permet de nuancer les conclusions de l'étude numérique, et souligne qu'un défaut n'est détectable que lorsqu'il modifie suffisamment les paramètres locaux de la plaque (module d'inertie ou matrice de rigidité). Il a également été mis en évidence que lorsque le jeu de données d'entrée n'est pas parfait, le résidu de la méthode n'est pas toujours nul en dehors des défauts, ce qui pose problème pour distinguer la contribution des défauts de la contribution du bruit de mesure.

Le couplage entre les deux méthodes développées dans ce mémoire est ensuite discuté, et une approche statistique de la littérature [68] est adaptée à notre problème pour faciliter le critère de décision de l'algorithme de détection de défauts. Cette méthode basée sur une vision Bayésienne du problème d'identification inverse permet non seulement d'obtenir le résidu des équations du mouvement, mais aussi de calculer les intervalles de crédibilité de toutes les grandeurs d'intérêt entrant en jeu dans la méthode RIFF. Les amplitudes de la source, du bruit et du résidu sont ainsi estimées et placées dans leurs intervalles de crédibilité à $p\%$. L'interprétation de ces intervalles de crédibilité permet d'estimer le degré de confiance que l'on peut accorder à la sortie de l'algorithme lorsqu'un défaut est détecté. Il est montré sur un cas expérimental que ce degré de confiance diminue au fur et à mesure que l'antenne microphonique s'éloigne de la pièce à étudier, du fait que les ondes évanescentes sont de plus en plus difficiles à reconstruire. À partir d'une certaine distance, l'algorithme ne détecte plus le défaut à moins de considérer des intervalles de crédibilité faibles ($p \rightarrow 0$), ce qui engendre également des faux positifs.

8.2 Atteinte des objectifs

Il est démontré dans le chapitre 7 que l'approche globale de ce mémoire permet effectivement de détecter des défauts dans une plaque. La localisation de ces défauts, ainsi que l'identification de leur forme est également possible. La quantification de la sévérité du défaut est aussi effectuée dans la mesure où le résidu de la méthode RIFF est directement lié à l'importance de la variation locale des paramètres de la plaque. On peut donc en conclure que l'objectif spécifique (1) de cette maîtrise est atteint. L'interprétation simple de la grandeur de sortie de la méthode RIFF transitoire comme le résidu causé par le déséquilibre des équations du mouvement permet aussi de considérer que l'objectif (5) est rempli. Enfin, il a été montré que la méthode RIFF permet d'inspecter n'importe quelle plaque stratifiée ou homogène, ce qui valide l'objectif (6).

De plus, les méthodes développées calculent l'évolution temporelle de toutes les grandeurs d'intérêt. Le fait d'exploiter des signaux temporels issus d'une excitation transitoire permet de sonder la structure sur une large bande fréquentielle en une seule mesure, ce qui remplit l'objectif spécifique (2).

Le formalisme TSD ainsi que la méthode RIFF transitoire permettent tous les deux une stabilisation satisfaisante de la solution lorsque l'on effectue une régularisation de Tikhonov. De plus, les méthodes standard d'optimisation du paramètre de régularisation présentées dans la littérature semblent être suffisamment robustes pour que les deux meilleurs paramètres de régularisation nécessaires lors de l'inspection d'une pièce soient choisis automatiquement. Il est par ailleurs possible de supprimer la contribution des hyper-paramètres au résultat de l'échantillonneur de Gibbs. Par conséquent, l'objectif spécifique (4) est pleinement atteint. En outre, la méthode Bayésienne utilisée au chapitre 7 permet d'obtenir des indicateurs qui sont parfaitement nuls en dehors des points correspondant aux positions des défauts, ce qui valide l'objectif (3). Enfin, l'intérêt de calculer les intervalles de crédibilité est de pouvoir estimer la confiance accordée à la sortie de l'algorithme, ce qui remplit également l'objectif spécifique (7).

8.3 Limitations et travaux futurs

La première des limitations des travaux présentés dans ce mémoire concerne la sensibilité de la méthode. Nous avons vu que les défauts dans une plaque ne sont correctement identifiés que si ils modifient suffisamment la structure. De plus, un défaut n'est détectable que s'il génère des perturbations du champ de vitesse à des nombres d'ondes inférieurs au critère de Shannon imposé par la géométrie de l'antenne microphonique. Autrement dit, la taille caractéristique des défauts théoriquement détectables doit être supérieure à l'écartement des microphones. Dans l'optique d'intégrer notre méthode aux procédures d'inspection d'une structure réelle, ces limitations imposent d'utiliser la technique TSD-NAH/RIFF comme un premier filtre pour détecter les défauts les plus grossiers : dans le cas où un défaut est détecté par cette technique avec un degré de confiance jugé suffisant, l'inspection est terminée, la pièce est déclarée défectueuse, et les opérateurs ne perdent pas de temps à appliquer d'autres méthodes plus longues et complexes à mettre en place.

Une autre limitation inhérente aux méthodes inverses est qu'il est nécessaire d'effectuer des mesures dans un environnement anéchoïque, ou *a minima* bien insonorisé, avec des parois absorbantes. Cela pose une limite l'applicabilité de la méthode lorsque les pièces à inspecter

ne peuvent pas être démontées pour être amenées dans une chambre anéchoïque. D'autre part, la qualité de l'inspection n'est satisfaisante que lorsque l'antenne microphonique est placée très près de la pièce, ce qui implique que la structure doit être parfaitement accessible.

En outre, la méthode proposée ne s'applique qu'aux plaques. Une adaptation du formalisme TSD-NAH et RIFF transitoire aux géométries cylindriques et sphériques pourrait être développée dans des travaux futurs pour inspecter des tubes ou d'autres types de structures. Cependant, la géométrie doit rester séparable, ce qui est une limitation importante à la méthode proposée. Si l'on souhaite étudier des structures ayant des formes plus complexes, il faut utiliser d'autres méthodes d'imagerie acoustique, comme la méthode des sources équivalentes [97], ou la méthode inverse des éléments finis de frontière [12]. Il faut également remplacer le formalisme RIFF par une autre méthode inverse. Il semblerait alors judicieux de partir de la thèse de Renzi [98], qui adapte la méthode RIFF en définissant un opérateur Elements Finis local. Néanmoins, toutes ces techniques sont généralement beaucoup plus coûteuses en temps de calcul que celles développées dans cette maîtrise, et leur application dans le domaine temporel n'est pas encore établie.

L'un des attraits de l'holographie acoustique comme méthode de mesure du champ de vitesse de la plaque est qu'elle est beaucoup moins coûteuse que la plupart des méthodes optiques concurrentes, comme la vibrométrie laser ou la corrélation d'images à haute vitesse. Cependant, si l'on souhaite avoir bonne une résolution tout en inspectant une zone de grande taille, le prix de l'antenne peut devenir conséquent, car beaucoup de microphones sont nécessaires. Pour pallier ce problème, il a été montré qu'il est possible d'utiliser un échantillonnage non uniforme, et d'appliquer l'acquisition comprimée pour reconstruire des hologrammes de pression en régime permanent [99]. Il serait intéressant de partir de ces travaux pour développer une formulation permettant une reconstruction du champ de vitesse transitoire de la plaque.

Enfin, dans les travaux présentés dans ce mémoire, la seule méthode de régularisation utilisée a été la régularisation ℓ_2 . Une régularisation semi-parcimonieuse (ℓ_q avec $q \in [1, 2]$) pourrait être utilisée pour voir si la qualité de la reconstruction est améliorée. Ceci pourrait être implémenté sur la méthode Bayésienne en remplaçant la fonction de densité Gaussienne $[\mathbf{f}|\tau_f]$ par une fonction de densité Gaussienne généralisée $[\mathbf{f}|\tau_f, q] \propto e^{-\tau_f \|\mathbf{f}\|_q^q}$, et en considérant q comme une variable aléatoire à inférer. Cette approche est proposée par Aucejo *et al.* [69] et implémentée par Li *et al.* [71] lorsque la position de l'excitation est connue à priori, mais elle n'est pas directement compatible avec la formulation développée dans ce mémoire, car

la circularisation de l'opérateur \mathbf{C} ne permet pas dans ce cas de simplifier les calculs. Cette idée constitue néanmoins l'une des pistes les plus intéressantes dans l'optique de poursuivre les travaux dans ce domaine.

8.4 Autres contributions

8.4.1 Encadrement

Cette maîtrise a été l'occasion de superviser Vincent Dansereau dans le cadre d'un stage de premier cycle CRSNG effectué à la session d'été 2018, puis d'un projet UPIR sur les sessions d'automne 2018 et d'hiver 2019. Outre l'aide précieuse fournie sur tout le volet expérimental de cette maîtrise, Vincent a produit une importante documentation destinée aux futurs étudiants souhaitant remonter et utiliser les montages expérimentaux.

8.4.2 Legs

Tous les codes et scripts utilisés pour produire les résultats de cette maîtrise sont mis en ligne sur le serveur du LAVA et pourront être utilisés après la fin de ma maîtrise. De plus, le banc d'essai construit pour tester la réponse transitoire des plaques pourra être réutilisé. En particulier, le système de marteau d'impact articulé par des roulements à billes pourra être adapté pour d'autres expériences nécessitant une excitation transitoire répétable.

RÉFÉRENCES

- [1] Y. Bar-Cohen, A. K. Mal, S.-S. Lih et Z. Chang, “Composite materials stiffness determination and defects characterization using enhanced leaky lamb wave dispersion data acquisition method”, *Nondestructive Evaluation of Aging Aircraft, Airports, and Aerospace Hardware III*, vol. 3586. International Society for Optics and Photonics, 1999, p. 250–256.
- [2] “Sperry rail service”, <https://www.sperryrail.com/technology.php>, accessed : 2019-08-23.
- [3] Q. Leclere, A. Pereira, C. Bailly, J. Antoni et C. Picard, “A unified formalism for acoustic imaging based on microphone array measurements”, *International Journal of Aeroacoustics*, vol. 16, n°. 4-5, p. 431–456, 2017.
- [4] R. Merino-Martínez, P. Sijtsma, M. Snellen, T. Ahlefeldt, J. Antoni, C. Bahr, D. Blacodan, D. Ernst, A. Finez, S. Funke *et al.*, “A review of acoustic imaging methods using phased microphone arrays”, *CEAS Aeronautical Journal*, vol. 10, n°. 1, p. 197–230, 2019.
- [5] P. Sijtsma, “Clean based on spatial source coherence”, *International journal of aeroacoustics*, vol. 6, n°. 4, p. 357–374, 2007.
- [6] T. F. Brooks et W. M. Humphreys, “A deconvolution approach for the mapping of acoustic sources (damas) determined from phased microphone arrays”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 294, n°. 4-5, p. 856–879, 2006.
- [7] Q. Leclere, “Acoustic imaging using under-determined inverse approaches : Frequency limitations and optimal regularization”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 321, n°. 3-5, p. 605–619, 2009.
- [8] J. Hald, “Basic theory and properties of statistically optimized near-field acoustical holography”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 125, n°. 4, p. 2105–2120, 2009.
- [9] E. G. Williams, *Fourier acoustics : sound radiation and nearfield acoustical holography*. Academic press, 1999.
- [10] X.-Z. Zhang, J.-H. Thomas, C.-X. Bi et J.-C. Pascal, “Reconstruction of nonstationary sound fields based on the time domain plane wave superposition method”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 132, n°. 4, p. 2427–2436, 2012.
- [11] S. F. Wu, “Reconstructing transient acoustic radiation from an arbitrary object with a uniform surface velocity distribution”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 136, n°. 2, p. 514–524, 2014.

- [12] A. Schuhmacher, J. Hald, K. B. Rasmussen et P. C. Hansen, “Sound source reconstruction using inverse boundary element calculations”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 113, n^o. 1, p. 114–127, 2003.
- [13] A. D. Pierce et R. T. Beyer, “Acoustics : An introduction to its physical principles and applications. 1989 edition”, 1990.
- [14] J. D. Maynard, E. G. Williams et Y. Lee, “Nearfield acoustic holography : I. theory of generalized holography and the development of nah”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 78, n^o. 4, p. 1395–1413, 1985.
- [15] S. Paillasseur, “Développement de la technique d’holographie acoustique de champ proche temps réel pour l’analyse de sources de bruit fluctuantes”, Thèse de doctorat, Le Mans, 2009.
- [16] W. Veronesi et J. D. Maynard, “Nearfield acoustic holography (nah) ii. holographic reconstruction algorithms and computer implementation”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 81, n^o. 5, p. 1307–1322, 1987.
- [17] A. N. Tihonov, “Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method”, *Soviet Math.*, vol. 4, p. 1035–1038, 1963.
- [18] E. G. Williams, “Regularization methods for near-field acoustical holography”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 110, n^o. 4, p. 1976–1988, 2001.
- [19] J.-M. Attendu et A. Ross, “Sparse regularization for reconstructing transient sources with time domain nearfield acoustical holography”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 143, n^o. 6, p. 3796–3806, 2018.
- [20] X. Li, W. Tong et M. Jiang, “Sound source localization via elastic net regularization”, *Fifth Berlin Beamforming Conference (BeBeC), Berlin, Germany, Feb*, 2014, p. 19–20.
- [21] P.-A. Gauthier, P. Lecomte et A. Berry, “Source sparsity control of sound field reproduction using the elastic-net and the lasso minimizers”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 141, n^o. 4, p. 2315–2326, 2017.
- [22] P. C. Hansen, “The l-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems”, 1999.
- [23] E. Van Den Berg et M. P. Friedlander, “Probing the pareto frontier for basis pursuit solutions”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 31, n^o. 2, p. 890–912, 2008.
- [24] G. H. Golub, M. Heath et G. Wahba, “Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter”, *Technometrics*, vol. 21, n^o. 2, p. 215–223, 1979.
- [25] S.-H. Yoon et P. A. Nelson, “Estimation of acoustic source strength by inverse methods : Part ii, experimental investigation of methods for choosing regularization parameters”, *Journal of sound and vibration*, vol. 233, n^o. 4, p. 665–701, 2000.

- [26] F. Deblauwe, J. Leuridan, J. Chauray et B. Béguet, “Acoustic holography in transient conditions”, *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, vol. 1999, n^o. 2. Institute of Noise Control Engineering, 1999, p. 1603–1612.
- [27] J. Hald, “Time domain acoustical holography and its applications”, *Sound and Vibration*, vol. 35, n^o. 2, p. 16–25, 2001.
- [28] J.-F. Blais et A. Ross, “Forward projection of transient sound pressure fields radiated by impacted plates using numerical laplace transform”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 125, n^o. 5, p. 3120–3128, 2009.
- [29] J.-M. Attendu et A. Ross, “Method for finding optimal exponential decay coefficient in numerical laplace transform for application to linear convolution”, *Signal Processing*, vol. 130, p. 47–56, 2017.
- [30] J. Blais et A. Ross, “Backward propagation of sound fields radiated by impacted plates using a transient acoustical holography approach”, *proceedings of Inter-noise, Ottawa, Canada*, vol. 916, 2009.
- [31] V. Grulier, S. Paillasseur, J.-H. Thomas, J.-C. Pascal et J.-C. Le Roux, “Forward propagation of time evolving acoustic pressure : Formulation and investigation of the impulse response in time-wavenumber domain”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 126, n^o. 5, p. 2367–2378, 2009.
- [32] J.-H. Thomas, V. Grulier, S. Paillasseur, J.-C. Pascal et J.-C. Le Roux, “Real-time near-field acoustic holography for continuously visualizing nonstationary acoustic fields”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 128, n^o. 6, p. 3554–3567, 2010.
- [33] X.-Z. Zhang, C.-X. Bi, Y.-B. Zhang et L. Geng, “Real-time nearfield acoustic holography for reconstructing the instantaneous surface normal velocity”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 52, p. 663–671, 2015.
- [34] J.-M. Attendu, “Convolution et déconvolution linéaire 3-d appliquées à l’holographie acoustique temporelle”, Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 2017.
- [35] J.-M. Attendu et A. Ross, “Time domain nearfield acoustical holography without wrap-around error and spectral leakage for forward propagation”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 141, n^o. 2, p. 1039–1050, 2017.
- [36] —, “Time domain nearfield acoustical holography with three-dimensional linear deconvolution”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 143, n^o. 3, p. 1672–1683, 2018.
- [37] P. J. Davis, *Circulant matrices*. American Mathematical Soc., 2013.
- [38] G. Hearn et R. B. Testa, “Modal analysis for damage detection in structures”, *Journal of structural engineering*, vol. 117, n^o. 10, p. 3042–3063, 1991.

- [39] A. Pandey, M. Biswas et M. Samman, “Damage detection from changes in curvature mode shapes”, *Journal of sound and vibration*, vol. 145, n°. 2, p. 321–332, 1991.
- [40] J.-T. Kim et N. Stubbs, “Model-uncertainty impact and damage-detection accuracy in plate girder”, *Journal of Structural Engineering*, vol. 121, n°. 10, p. 1409–1417, 1995.
- [41] M. L. Wang, F. L. Xu et G. M. Lloyd, “Systematic numerical analysis of the damage index method used for bridge diagnostics”, *Smart Structures and Materials 2000 : Smart Systems for Bridges, Structures, and Highways*, vol. 3988. International Society for Optics and Photonics, 2000, p. 154–165.
- [42] A. J. Romano, J. J. Shirron et J. A. Bucaro, “On the noninvasive determination of material parameters from a knowledge of elastic displacements theory and numerical simulation”, *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 45, n°. 3, p. 751–759, 1998.
- [43] A. J. Romano, J. A. Bucaro, R. Ehnann et J. J. Shirron, “Evaluation of a material parameter extraction algorithm using mri-based displacement measurements”, *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 47, n°. 6, p. 1575–1581, 2000.
- [44] J. Bucaro, A. Romano, P. Abraham et S. Dey, “Detection and localization of inclusions in plates using inversion of point actuated surface displacements”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 115, n°. 1, p. 201–206, 2004.
- [45] A. J. Romano, J. A. Bucaro, J. F. Vignola et P. B. Abraham, “Detection and localization of rib detachment in thin metal and composite plates by inversion of laser doppler vibrometry scans”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 121, n°. 5, p. 2667–2672, 2007.
- [46] A. J. Romano, J. A. Bucaro et S. Dey, “Defect detection and localization in orthotropic wood slabs by inversion of dynamic surface displacements”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 124, n°. 2, p. 918–925, 2008.
- [47] G. Pedrini, W. Osten et M. E. Gusev, “High-speed digital holographic interferometry for vibration measurement”, *Applied optics*, vol. 45, n°. 15, p. 3456–3462, 2006.
- [48] J. Poittevin, F. Gautier, C. Pézerat et P. Picart, “High-speed holographic metrology : principle, limitations, and application to vibroacoustics of structures”, *Optical Engineering*, vol. 55, n°. 12, p. 121717, 2016.
- [49] P. K. Rastogi, “Digital speckle pattern interferometry and related techniques”, *Digital Speckle Pattern Interferometry and Related Techniques*, by PK Rastogi (Editor), pp. 384. ISBN 0-471-49052-0. Wiley-VCH, December 2000., p. 384, 2000.

- [50] M. N. Helfrick, C. Niezrecki, P. Avitabile et T. Schmidt, “3d digital image correlation methods for full-field vibration measurement”, *Mechanical systems and signal processing*, vol. 25, n° 3, p. 917–927, 2011.
- [51] S. Avril, F. Pierron, M. A. Sutton et J. Yan, “Identification of elasto-visco-plastic parameters and characterization of lüders behavior using digital image correlation and the virtual fields method”, *Mechanics of materials*, vol. 40, n° 9, p. 729–742, 2008.
- [52] A. Giraudeau et F. Pierron, “Identification of stiffness and damping properties of thin isotropic vibrating plates using the virtual fields method : theory and simulations”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 284, n° 3-5, p. 757–781, 2005.
- [53] A. Berry, O. Robin et F. Pierron, “Identification of dynamic loading on a bending plate using the virtual fields method”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, n° 26, p. 7151–7164, 2014.
- [54] P. O’Donoughue, O. Robin et A. Berry, “Time-resolved identification of mechanical loadings on plates using the virtual fields method and deflectometry measurements”, *Strain*, vol. 54, n° 3, p. e12258, 2018.
- [55] C. Pezerat et J. Guyader, “Two inverse methods for localization of external sources exciting a beam”, *Acta Acustica*, vol. 3, n° 1, p. 1–10, 1995.
- [56] —, “Force analysis technique : reconstruction of force distribution on plates”, *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 86, n° 2, p. 322–332, 2000.
- [57] M. Djamaa, N. Ouelaa, C. Pezerat et J.-L. Guyader, “Reconstruction of a distributed force applied on a thin cylindrical shell by an inverse method and spatial filtering”, *Journal of sound and vibration*, vol. 301, n° 3-5, p. 560–575, 2007.
- [58] C. Renzi, C. Pezerat et J.-L. Guyader, “Vibratory source identification by using the finite element model of a subdomain of a flexural beam”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, n° 3, p. 545–562, 2013.
- [59] C. Renzi, C. Pézerat et J.-L. Guyader, “Local force identification on flexural plates using reduced finite element models”, *Computers & Structures*, vol. 144, p. 75–91, 2014.
- [60] D. Lecoq, C. Pézerat, J.-H. Thomas et W. Bi, “Extraction of the acoustic component of a turbulent flow exciting a plate by inverting the vibration problem”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, n° 12, p. 2505–2519, 2014.
- [61] Q. Leclère, F. Ablitzer et C. Pézerat, “Practical implementation of the corrected force analysis technique to identify the structural parameter and load distributions”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 351, p. 106–118, 2015.

- [62] F. Ablitzer, C. Pézerat, J.-M. Gènevaux et J. Bégué, “Identification of stiffness and damping properties of plates by using the local equation of motion”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, n°. 9, p. 2454–2468, 2014.
- [63] H. Xu, L. Cheng, Z. Su et J.-L. Guyader, “Identification of structural damage based on locally perturbed dynamic equilibrium with an application to beam component”, *Journal of sound and vibration*, vol. 330, n°. 24, p. 5963–5981, 2011.
- [64] —, “Damage visualization based on local dynamic perturbation : Theory and application to characterization of multi-damage in a plane structure”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, n°. 14, p. 3438–3462, 2013.
- [65] C. Pezerat, Q. Leclère, N. Totaro et M. Pachebat, “Identification of vibration excitations from acoustic measurements using near field acoustic holography and the force analysis technique”, *Journal of sound and vibration*, vol. 326, n°. 3-5, p. 540–556, 2009.
- [66] S. F. Wu et P. Zhou, “Analyzing excitation forces acting on a plate based on measured acoustic pressure”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 140, n°. 1, p. 510–523, 2016.
- [67] E. Zhang, J. Antoni et P. Feissel, “Bayesian force reconstruction with an uncertain model”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, n°. 4, p. 798–814, 2012.
- [68] C. Faure, F. Ablitzer, J. Antoni et C. Pézerat, “Empirical and fully bayesian approaches for the identification of vibration sources from transverse displacement measurements”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 94, p. 180–201, 2017.
- [69] M. Aucejo et O. De Smet, “On a full bayesian inference for force reconstruction problems”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 104, p. 36–59, 2018.
- [70] —, “Bayesian source identification using local priors”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 66, p. 120–136, 2016.
- [71] Q. Li et Q. Lu, “A hierarchical bayesian method for vibration-based time domain force reconstruction problems”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 421, p. 190–204, 2018.
- [72] S. Schedin, C. Lambourg et A. Chaigne, “Transient sound fields from impacted plates : Comparison between numerical simulations and experiments”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 221, n°. 3, p. 471–490, 1999.
- [73] A. Ross et G. Ostiguy, “Propagation of the initial transient noise from an impacted plate”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 301, n°. 1-2, p. 28–42, 2007.
- [74] J. Li, Z. Shi et L. Liu, “A unified scaled boundary finite element method for transient two-dimensional vibro-acoustic analysis of plate-like structures”, *Computers & Structures*, vol. 202, p. 105–128, 2018.

- [75] D. Ou et C. Mak, “A review of prediction methods for the transient vibration and sound radiation of plates”, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, vol. 32, n°. 4, p. 309–322, 2013.
- [76] M. Abdelhamid, H. Nacer et G. J. Louis, “Subjective evaluations of sound radiated by impacted plates, using the design of experiments method”, *Applied Acoustics*, vol. 71, n°. 6, p. 531–538, 2010.
- [77] S. McAdams, V. Roussarie, A. Chaigne et B. L. Giordano, “The psychomechanics of simulated sound sources : Material properties of impacted thin plates”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 128, n°. 3, p. 1401–1413, 2010.
- [78] Y. Fu, M. Guo et P. B. Phua, “Multipoint laser doppler vibrometry with single detector : principles, implementations, and signal analyses”, *Applied optics*, vol. 50, n°. 10, p. 1280–1288, 2011.
- [79] L. Geng, C.-X. Bi, F. Xie et X.-Z. Zhang, “Reconstruction of instantaneous surface normal velocity of a vibrating structure using interpolated time-domain equivalent source method”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 107, p. 1 – 11, 2018.
- [80] L. Geng, F. Xie et S. Lu, “Reconstructing non-stationary surface normal velocity of a planar structure using pressure-velocity probes”, *Applied Acoustics*, vol. 134, p. 46 – 53, 2018.
- [81] S. Lee, “The use of equivalent source method in computational acoustics”, *Journal of Computational Acoustics*, vol. 25, n°. 01, p. 1630001, 2017.
- [82] P. C. Hansen, “Deconvolution and regularization with toeplitz matrices”, *Numerical Algorithms*, vol. 29, n°. 4, p. 323–378, 2002.
- [83] P. C. Hansen et D. P. O’Leary, “The use of the l-curve in the regularization of discrete ill-posed problems”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 14, n°. 6, p. 1487–1503, 1993.
- [84] A. Pereira, J. Antoni et Q. Leclerc, “Empirical bayesian regularization of the inverse acoustic problem”, *Applied Acoustics*, vol. 97, p. 11–29, 2015.
- [85] J. F. Kelly et R. J. McGough, “An annular superposition integral for axisymmetric radiators”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 121, n°. 2, p. 759–765, 2007.
- [86] P. R. Stepanishen, “Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 49, n°. 5B, p. 1629–1638, 1971.
- [87] J. Prezelj, P. Lipar, A. Belšak et M. Čudina, “On acoustic very near field measurements”, *Mechanical systems and signal processing*, vol. 40, n°. 1, p. 194–207, 2013.

- [88] Altuglas International, “Plexiglas® general information and physical properties”, <https://www.plexiglas.com/export/sites/plexiglas/.content/medias/downloads/sheet-docs/plexiglas-general-information-and-physical-properties.pdf>, 2005, online ; accessed : 2019-05-24.
- [89] M. V. Van der Seijs, D. de Klerk et D. J. Rixen, “General framework for transfer path analysis : History, theory and classification of techniques”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 68, p. 217–244, 2016.
- [90] Y. Zhang et J. A. Mann III, “Examples of using structural intensity and the force distribution to study vibrating plates”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 99, n°. 1, p. 354–361, 1996.
- [91] B. Dobson et E. Rider, “A review of the indirect calculation of excitation forces from measured structural response data”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Mechanical Engineering Science*, vol. 204, n°. 2, p. 69–75, 1990.
- [92] C. Renzi, C. Pezerat et J.-L. Guyader, “Identification of vibration excitation using a regularized finite element operator and a deconvolution post-process”, *Acoustics 2012*, 2012.
- [93] Q. Leclerc et C. Pezerat, “Time domain identification of loads on plate-like structures using an array of acoustic velocity sensors”, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 123, n°. 5, p. 3175, 2008.
- [94] P. C. Hansen, *Rank-deficient and discrete ill-posed problems : numerical aspects of linear inversion*. Siam, 2005, vol. 4.
- [95] R. M. Gray *et al.*, “Toeplitz and circulant matrices : A review”, *Foundations and Trends® in Communications and Information Theory*, vol. 2, n°. 3, p. 155–239, 2006.
- [96] B. Lecoutre, “Et si vous étiez un bayésien qui s’ ignore”, *Revue Modulad*, vol. 32, p. 92–105, 2005.
- [97] L. Geng, C.-X. Bi, F. Xie et X.-Z. Zhang, “Reconstruction of instantaneous surface normal velocity of a vibrating structure using interpolated time-domain equivalent source method”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 107, p. 1–11, 2018.
- [98] C. Renzi, “Identification expérimentale de sources vibratoires par résolution du problème inverse modélisé par un opérateur éléments finis local”, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2011.
- [99] G. Chardon, L. Daudet, A. Peillot, F. Ollivier, N. Bertin et R. Gribonval, “Near-field acoustic holography using sparse regularization and compressive sampling principles”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 132, n°. 3, p. 1521–1534, 2012.

ANNEXE A SYNOPSIS DES MÉTHODES D'HOLOGRAPHIE ACOUSTIQUE TRANSITOIRE EN CHAMP PROCHE

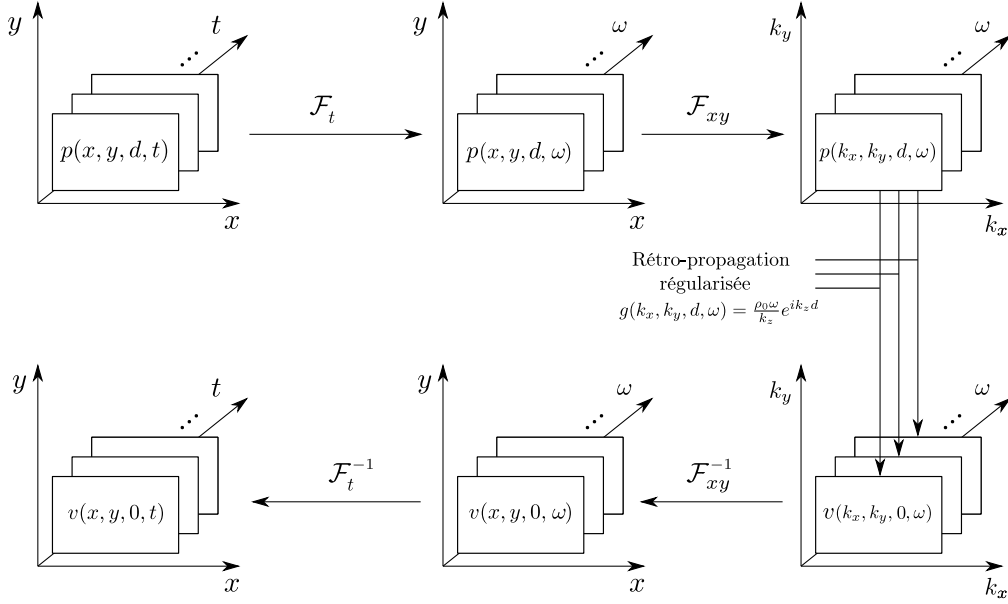


Figure A.1 Étapes d'implémentation de la Time method. \mathcal{F}_{xy} désigne la transformée de Fourier bi-dimensionnelle dans les directions x et y , et \mathcal{F}_t désigne la transformée de Fourier suivant l'axe t .

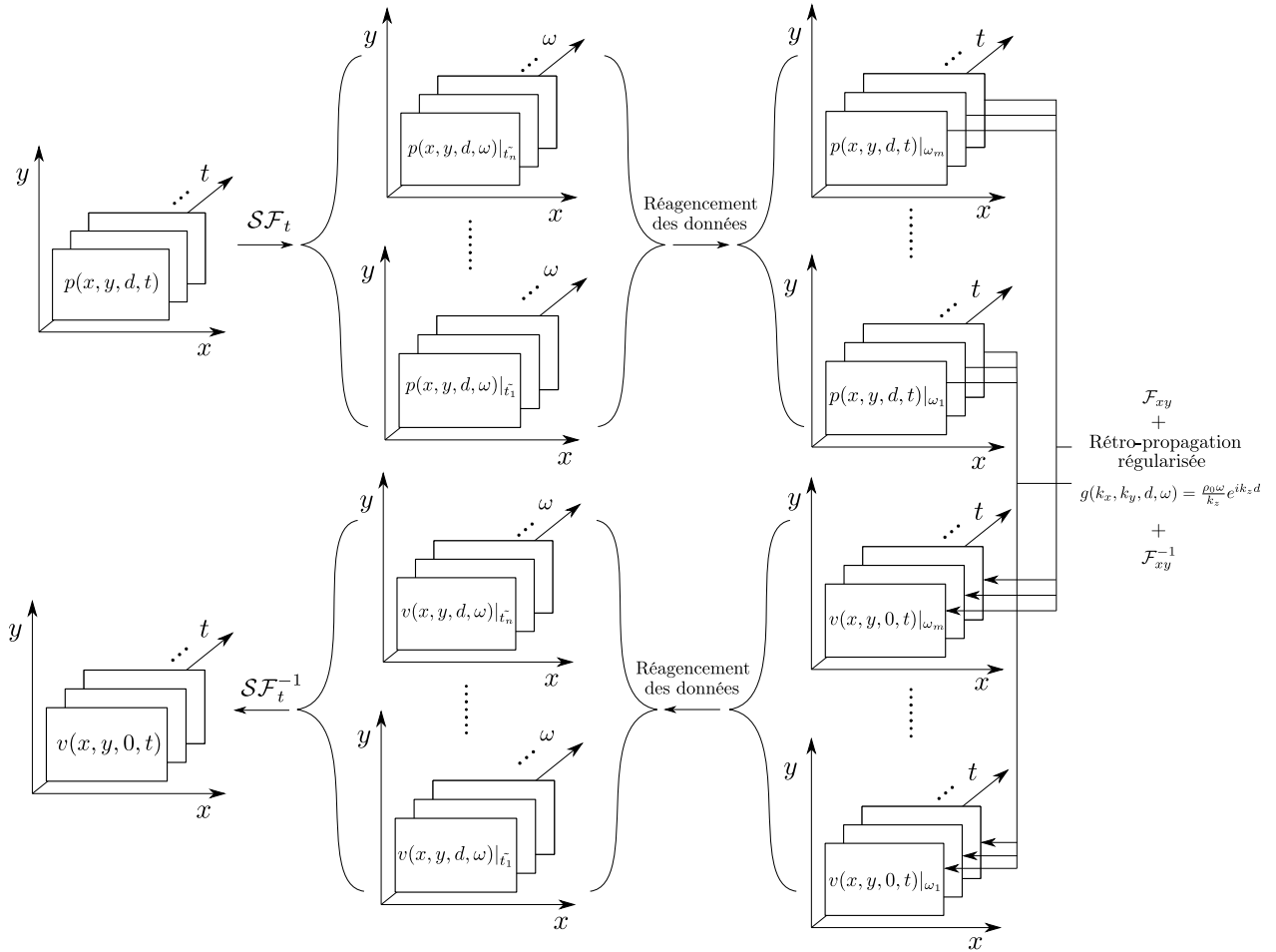


Figure A.2 Étapes d'implémentation de la TD-NAH. \mathcal{SF}_t désigne la transformée de Fourier à court terme.

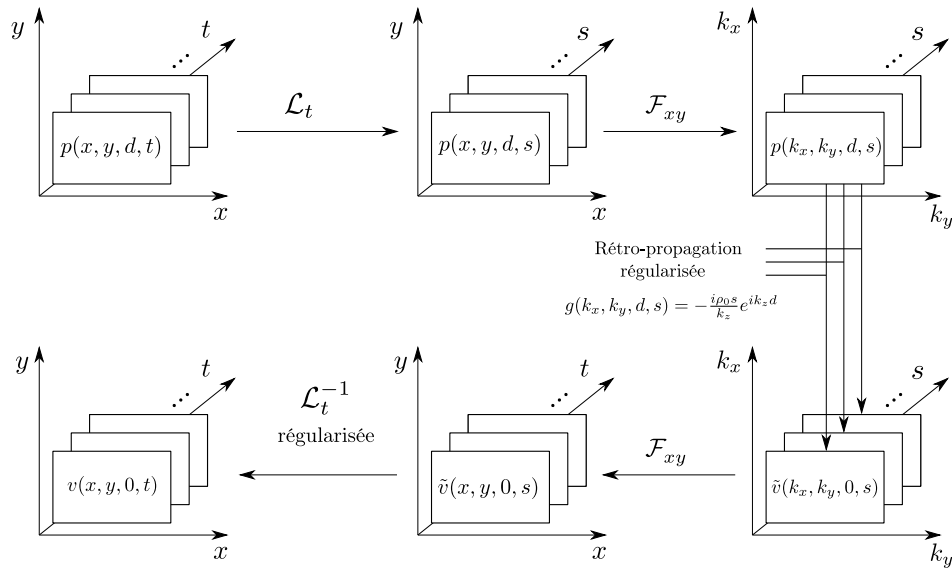


Figure A.3 Étapes d'implémentation de la T-NAH. \mathcal{L}_t désigne la transformée de Laplace. Deux régularisations sont nécessaires, à la troisième et dernière étape.

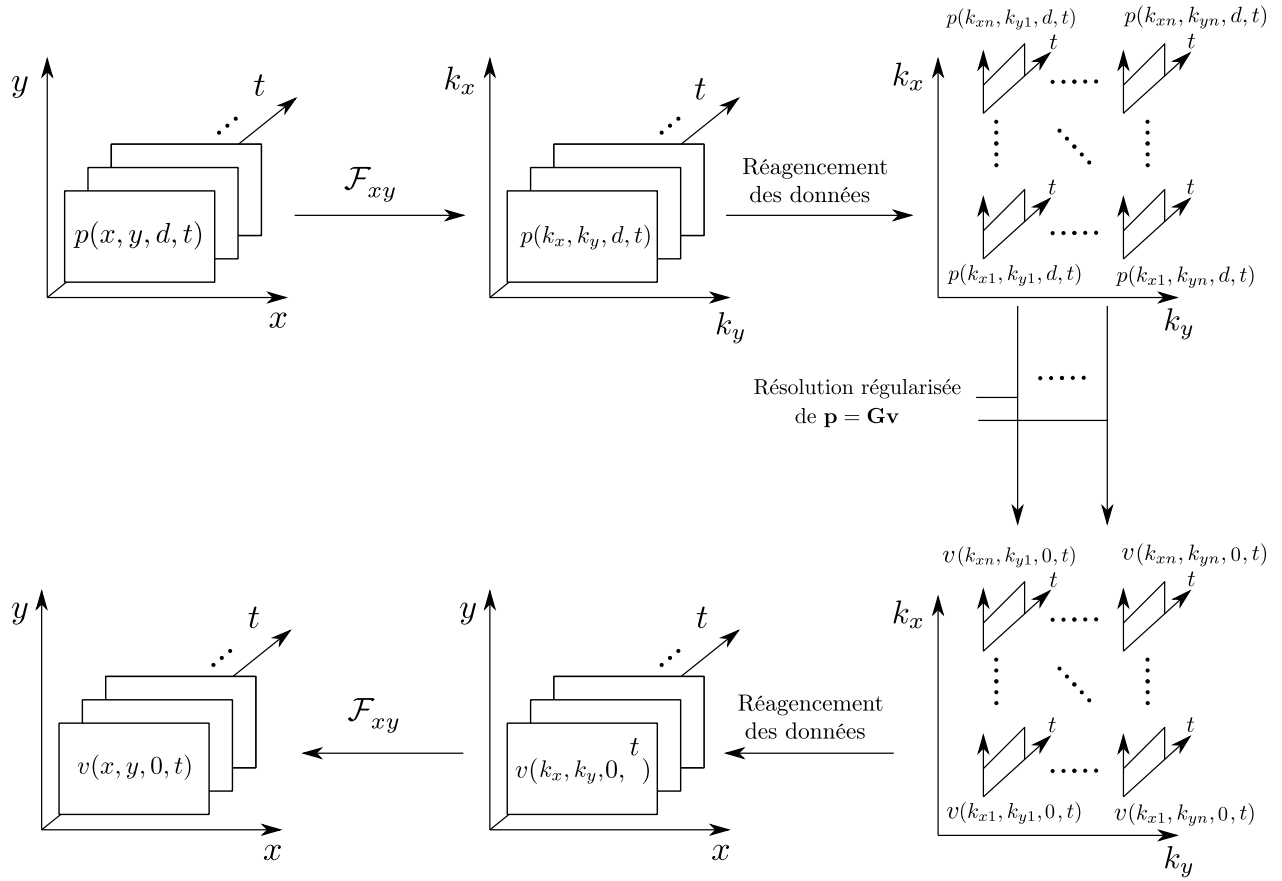


Figure A.4 Étapes d'implémentation de la RT-NAH.

ANNEXE B CIRCULARISATION D'UN OPÉRATEUR TOEPLITZ

Dans le formalisme TSD-NAH, la relation de convolution qui lie la pression sur le plan de mesure p_m et sur le plan de reconstruction p_s est exprimée par une matrice Toeplitz par blocs circularisée. Pour comprendre cette opération de circularisation, il est utile de prendre un exemple unidimensionnel, en considérant la convolution entre deux signaux \mathbf{a} et \mathbf{b} . Le résultat \mathbf{c} de la convolution peut être exprimé sous la forme d'un produit matriciel :

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & a_n & \cdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La matrice de convolution linéaire est une matrice Toeplitz. Il est possible d'étendre ce système pour faire apparaître une matrice \mathbf{A} :

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_n & \ddots & \ddots & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \ddots & a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n & \cdots & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

L'avantage de travailler sur la matrice \mathbf{A} est qu'elle est circulante. Elle possède donc la propriété d'être diagonalisable par la matrice de transformée de Fourier discrète \mathbf{F} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{D}_a \mathbf{F} \quad (\text{B.3})$$

avec $(\mathbf{F})_{(k,j)} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(e^{-\frac{2i\pi}{2n}} \right)^{(k-1)(j-1)}$, et $\mathbf{D}_{\mathbf{a}} = \text{diag}(\mathcal{F}(\mathbf{a}_{zp})) = \text{diag}(\mathcal{F}([a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0]))$ est la matrice diagonale constituée par la transformée de Fourier discrète du vecteur \mathbf{a} complété avec des zeros, noté \mathbf{a}_{zp} (pour zero-padding). Si aucun des éléments de cette transformée de Fourier n'est nul, la matrice \mathbf{A} est inversible et son inverse peut être calculée uniquement à partir de la transformée de Fourier discrète du vecteur \mathbf{a}_{zp} . Pour effectuer une déconvolution et reconstruire le signal \mathbf{b} , il est donc possible d'exploiter cette structure circulante.

Dans le cas de l'holographie acoustique, la matrice de convolution tri-dimensionnelle \mathbf{G} est Toeplitz par blocs, où chaque bloc est lui-même Toeplitz par blocs, et où chaque sous-bloc est Toeplitz. Dans ce cas, le même principe de circularisation peut s'appliquer pour obtenir une matrice circulante par blocs, où chaque bloc est lui-même circulant par blocs, et où chaque sous-bloc est circulant. Une telle matrice peut être diagonalisée par la matrice de Transformée de Fourier discrète tri-dimensionnelle, et la diagonale équivalente est $\text{diag}(\mathcal{F}_{xyt}(\mathbf{g}))$.